Loi des grands nombres

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Calculatrice autorisée.

Leçon 1 : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 1 : le standard de la mairie

Un standard de mairie reçoit chaque jour un nombre X d'appels, d'espérance 120 et d'écart type 10. On ne connaît pas la loi de X.

1. Majorer $P\big(|X-120| \geqslant 25\big)$.
2. Majorer $P(X \geqslant 150)$. Justifier.
3. Écrire 40 à l'aide de σ, puis majorer $P\big(|X-120| \geqslant 40\big)$.
4. Pour quelle valeur de δ la borne de l'inégalité vaut-elle $0{,}04$? Exprimer ce δ à l'aide de σ.
5. Pourquoi l'inégalité ne dit-elle rien pour $\delta = 8$?

Exercice 2 : les bornes de recharge

Sur un parking, le nombre X de bornes de recharge occupées à 18 heures suit la loi suivante.

x	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x)$	$0{,}05$	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}1$	$0{,}05$

1. Calculer $\mu = E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centième).
2. On prend $\delta = 2$. Calculer la valeur exacte de $P\big(|X-4| \geqslant 2\big)$ et la borne de l'inégalité. Comparer.
3. Même question pour $\delta = 3$.
4. Même question pour $\delta = 1$. Que dit l'inégalité ?
5. Calculer $P\big(|X-4| \geqslant 2\sigma\big)$ et comparer à $\dfrac{1}{4}$.

Leçon 2 : appliquer l'inégalité, et voir ses limites

Exercice 3 : la pépinière

Une pépinière plante 900 jeunes lavandes. Chacune, indépendamment des autres, ne prend pas avec la probabilité $0{,}1$. On note X le nombre de plants qui ne prennent pas.

1. Donner la loi de X, son espérance, sa variance et son écart type.
2. Minorer $P(72 < X < 108)$ avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Minorer $P(63 < X < 117)$.
4. Majorer $P(X \geqslant 117)$.
5. Minorer $P(70 < X < 120)$. Attention : cet intervalle n'est pas centré en μ.
6. À la calculatrice, donner une valeur approchée de $P(72 < X < 108)$ au millième, et comparer à la question 2.

Exercice 4 : un jeu où la borne est atteinte

Dans un jeu, le gain X, en euros, vaut -2, 0 ou 2, avec les probabilités $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{8}$.

1. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
2. Pour $\delta = 2$, comparer $P\big(|X| \geqslant 2\big)$ et la borne de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Même question pour $\delta = 3$.
4. Soit $a \geqslant 1$ un réel. La variable Y vaut $-a$, 0 ou a, avec les probabilités $\frac{1}{2a^2}$, $1 - \frac{1}{a^2}$ et $\frac{1}{2a^2}$. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$, puis comparer $P\big(|Y| \geqslant a\big)$ à la borne de l'inégalité.
5. Peut-on remplacer la borne $\frac{1}{k^2}$ par une borne plus petite, valable pour **toutes** les lois ? Que penser alors de la phrase « l'inégalité est loin d'être optimale » ?

Leçon 3 : l'inégalité de concentration

Exercice 5 : les livraisons

La durée X d'une livraison à vélo, en minutes, a pour espérance 30 et pour écart type 6. On note M_n la durée moyenne de n livraisons, qui forment un échantillon de la loi de X, et S_n leur durée totale.

1. Pour $n = 36$, calculer $E(M_{36})$, $V(M_{36})$ et $\sigma(M_{36})$.
2. Majorer $P\big(|M_{36} - 30| \geqslant 2\big)$.
3. Calculer $E(S_{36})$, puis majorer $P\big(|S_{36} - 1\,080| \geqslant 90\big)$.
4. Minorer $P(27 < M_{36} < 33)$.
5. Que devient la borne de la question 2 pour $n = 100$?

Exercice 6 : la fromagerie

Une fromagerie produit des fromages dont la masse X, en grammes, vaut 240, 250 ou 260, avec les probabilités $0{,}25$; $0{,}5$ et $0{,}25$.

1. Calculer μ, V et σ (arrondi au centième).
2. Majorer $P\big(|M_{50} - 250| \geqslant 2\big)$, puis $P\big(|M_{200} - 250| \geqslant 2\big)$.
3. Que dirait l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour un seul fromage, avec $\delta = 2$?
4. Vérifier que $\sigma(M_{50}) = 1$, puis majorer $P\big(|M_{50} - 250| \geqslant 3\big)$ en utilisant $k\,\sigma(M_{50})$.
5. Par combien faut-il multiplier n pour diviser $\sigma(M_n)$ par 3 ?

Leçon 4 : choisir la taille d'un échantillon

Exercice 7 : des sachets de lentilles

La masse X, en grammes, d'un sachet de lentilles a pour variance 25. Pour contrôler la masse moyenne μ, on pèse n sachets, qui forment un échantillon de la loi de X.

1. Déterminer une taille n qui suffit pour une précision de 1 gramme et un risque de $5\,\%$.
2. Même question avec un risque de $1\,\%$.
3. Même question avec une précision de $0{,}5$ gramme et un risque de $5\,\%$. Comparer à la question 1.
4. Même question avec une précision de $0{,}7$ gramme et un risque de $10\,\%$.
5. On ne peut peser que $1\,000$ sachets, et on veut un risque de $5\,\%$. Quelle précision δ peut-on garantir ? Donner une valeur approchée au centième.

Exercice 8 : un sondage sur le compost

Une association veut estimer la proportion p de foyers d'une grande ville qui font du compost. Elle interroge n foyers au hasard, ce que l'on assimile à un tirage avec remise. On note F_n la fréquence des réponses oui.

1. Démontrer que, pour tout réel p, $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$. *(On pourra développer $\left(p - \frac{1}{2}\right)^2$.)*
2. Déterminer une taille n qui suffit pour une précision de $0{,}04$ et un risque de $10\,\%$.
3. L'association interroge $1\,000$ foyers. Majorer le risque d'une erreur d'au moins $0{,}05$.
4. Une étude précédente assure que $p \leqslant 0{,}2$. Montrer que l'on a alors $p(1-p) \leqslant 0{,}16$, puis reprendre la question 2.
5. Les tailles trouvées sont-elles les plus petites possibles ? Expliquer.

Leçon 5 : la loi des grands nombres

Exercice 9 : redémontrer

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V, et M_n la moyenne d'un échantillon de taille n de sa loi.

1. Rappeler $E(M_n)$ et $V(M_n)$.
2. En déduire l'inégalité de concentration à partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Démontrer que, pour tout $\delta > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P\big(|M_n - \mu| \geqslant \delta\big) = 0$.
4. Dans une grande ville, un habitant tiré au hasard possède un vélo avec la probabilité $0{,}3$. On interroge n habitants au hasard, ce que l'on assimile à un tirage avec remise, et F_n est la fréquence des propriétaires de vélo. À partir de quelle taille n la borne de $P\big(|F_n - 0{,}3| \geqslant 0{,}01\big)$ est-elle inférieure ou égale à $0{,}001$?
5. Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} P\big(|F_n - 0{,}3| < 0{,}01\big)$? Justifier.

Exercice 10 : vrai ou faux

On lance une pièce équilibrée. On note S_n le nombre de piles en n lancers et $F_n = \dfrac{S_n}{n}$. Dire si chaque phrase est vraie ou fausse, et justifier.

1. Après huit faces de suite, le prochain lancer a plus de chances de donner pile.
2. Pour tout $\delta > 0$, $P\big(|F_n - 0{,}5| \geqslant \delta\big)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
3. La probabilité d'obtenir exactement autant de piles que de faces tend vers 1 quand n augmente. *(Calculer $P(S_{100} = 50)$ et comparer à $P(S_{10\,000} = 5\,000) \approx 0{,}008$.)*
4. L'écart type de $S_n - \dfrac{n}{2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
5. Pour tout $\delta > 0$, il existe un entier n tel que $P\big(|F_n - 0{,}5| \geqslant \delta\big) \leqslant 0{,}001$.

Leçon 6 : simuler des échantillons avec Python

Exercice 11 : lire et compléter un programme

Dans un jeu de société, une carte rapporte 5 points une fois sur cinq, et 0 point sinon. Le nombre de points d'une carte est une variable X.

```
from random import randint

cartes = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 5]

def moyenne(n):
    ech = [cartes[randint(0, 9)] for i in range(n)]
    return ...

def moyennes(N, n):
    return [moyenne(n) for i in range(N)]

def proportion(L, mu, e):
    proches = [m for m in L if abs(m - mu) <= e]
    return len(proches) / len(L)
```

1. Donner la loi de X, puis calculer μ, V et σ.
2. Compléter la ligne manquante de la fonction `moyenne`.
3. Que contient la liste `moyennes(1000, 400)` ?
4. Pour $n = 400$, calculer $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$, puis écrire l'instruction qui donne la proportion de ces moyennes dont l'écart à μ est au plus $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.
5. Quelle valeur cette proportion devrait-elle au moins atteindre d'après l'inégalité de concentration, aux fluctuations de la simulation près ?

Exercice 12 : interpréter une simulation

On reprend le jeu de l'exercice 11. Pour chaque taille n, on a simulé $N = 1\,000$ échantillons. On note s l'écart type de la série des moyennes.

Taille n	25	100	400
s observé	$0{,}401$	$0{,}195$	$0{,}096$
Proportion, écart $\leqslant \dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$	$0{,}977$	$0{,}970$	$0{,}965$

1. Calculer $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ pour chaque taille, et comparer à s.
2. Par combien s est-il divisé quand n est multiplié par 4 ? Est-ce conforme au cours ?
3. Comparer les proportions à la garantie de l'inégalité de concentration. Que peut-on en conclure sur cette inégalité ?
4. Une simulation est-elle une démonstration ? Expliquer.

Leçon 7 : loi binomiale et marche aléatoire en Python

Exercice 13 : la borne et la vraie valeur

Soit S_n une variable de loi $\mathcal{B}(n, p)$, et la fonction du cours :

```
from math import comb, sqrt

def proba_ecart(n, p):
    total = 0
    for k in range(n + 1):
        if abs(k - p * n) > sqrt(n):
            total = total + comb(n, k) * p**k * (1 - p)**(n - k)
    return total
```

Une solution de BarroTech

1. Rappeler $E(S_n)$ et $V(S_n)$, puis démontrer que $P\big(|S_n - pn| > \sqrt{n}\big) \leqslant p(1-p)$.
2. Pour $n = 9$ et $p = 0{,}5$, pour quelles valeurs de k la condition du `if` est-elle vraie ? En déduire la valeur exacte de `proba_ecart(9, 0.5)`.
3. On a obtenu, arrondis à 10^{-4} : `proba_ecart(25, 0.3)` $\approx 0{,}0264$, `proba_ecart(100, 0.3)` $\approx 0{,}0214$ et `proba_ecart(400, 0.3)` $\approx 0{,}0252$. Quelle est la borne pour $p = 0{,}3$? Comparer.
4. Pourquoi peut-on utiliser l'inégalité, écrite pour « $\geqslant$ », alors que le programme teste « $>$ » ?

Exercice 14 : une marche aléatoire

Un pion part de 0 sur une droite graduée. À chaque étape, il avance d'une case ou recule d'une case, avec la probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment des autres étapes. On note X_i son déplacement à l'étape i et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ sa position après n étapes.

1. Calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$, puis $E(S_n)$, $V(S_n)$ et $\sigma(S_n)$.
2. Donner la loi de S_4, et vérifier sur cette loi que $E(S_4) = 0$ et $V(S_4) = 4$.
3. Majorer $P\big(|S_{100}| \geqslant 20\big)$. La vraie valeur est environ $0{,}057$: commenter.
4. On pose $M_n = \dfrac{S_n}{n}$. Majorer $P\big(|M_n| \geqslant 0{,}1\big)$ en fonction de n. Que vaut la limite de cette probabilité ?
5. Avec la fonction `marche(n)` du cours, quelle instruction donne la position du pion après 400 étapes ?
6. La position S_n se rapproche-t-elle de 0 quand n grandit ? Expliquer la différence avec M_n.

Une solution de BarroTech