Loi des grands nombres

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

$\mu = 120$, $\sigma = 10$, donc $V(X) = 100$.

1. $P\big(|X - 120| \geqslant 25\big) \leqslant \dfrac{100}{25^2} = \dfrac{100}{625} = 0{,}16$.
2. Si $X \geqslant 150$, alors $|X - 120| \geqslant 30$. Donc $P(X \geqslant 150) \leqslant P\big(|X - 120| \geqslant 30\big) \leqslant \dfrac{100}{900} = \dfrac{1}{9} \approx 0{,}111$.
3. $40 = 4\sigma$, donc $P\big(|X - 120| \geqslant 4\sigma\big) \leqslant \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16} = 0{,}0625$.
4. $\dfrac{100}{\delta^2} = 0{,}04$ donne $\delta^2 = 2\,500$, soit $\delta = 50 = 5\sigma$.
5. Pour $\delta = 8$, la borne vaut $\dfrac{100}{64} = 1{,}5625$. Elle dépasse 1, or une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1 : l'inégalité est vraie, mais elle ne dit rien.

Exercice 2

1. Par symétrie autour de 4, ou par le calcul : $\mu = 1 \times 0{,}05 + 2 \times 0{,}1 + 3 \times 0{,}2 + 4 \times 0{,}3 + 5 \times 0{,}2 + 6 \times 0{,}1 + 7 \times 0{,}05 = 4$. $V(X) = 2 \times (0{,}05 \times 9 + 0{,}1 \times 4 + 0{,}2 \times 1) = 2{,}1$, et $\sigma(X) = \sqrt{2{,}1} \approx 1{,}45$.
2. $|X - 4| \geqslant 2$ pour $X \in \{1, 2, 6, 7\}$: $P = 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}05 = 0{,}3$. La borne vaut $\dfrac{2{,}1}{4} = 0{,}525$. On a bien $0{,}3 \leqslant 0{,}525$.
3. $|X - 4| \geqslant 3$ pour $X \in \{1, 7\}$: $P = 0{,}1$. La borne vaut $\dfrac{2{,}1}{9} \approx 0{,}233$.
4. $|X - 4| \geqslant 1$ pour $X \neq 4$: $P = 0{,}7$. La borne vaut $2{,}1$: elle dépasse 1, l'inégalité ne dit rien.
5. $2\sigma \approx 2{,}90$. Seuls $X = 1$ et $X = 7$ conviennent : $P\big(|X - 4| \geqslant 2\sigma\big) = 0{,}1$, bien inférieure à $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 3

1. On répète 900 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre $0{,}1$: X suit la loi $\mathcal{B}(900\,;0{,}1)$. Donc $\mu = 90$, $V(X) = 90 \times 0{,}9 = 81$ et $\sigma = 9$.
2. Avec $\delta = 18$: $P(72 < X < 108) = P\big(|X - 90| < 18\big) \geqslant 1 - \dfrac{81}{324} = 0{,}75$.
3. Avec $\delta = 27$: $P(63 < X < 117) \geqslant 1 - \dfrac{81}{729} = \dfrac{8}{9} \approx 0{,}889$.
4. Si $X \geqslant 117$, alors $|X - 90| \geqslant 27$. Donc $P(X \geqslant 117) \leqslant \dfrac{81}{729} = \dfrac{1}{9} \approx 0{,}111$.
5. *On se ramène à un intervalle centré en μ, contenu dans le premier.* $]70\,;110[$ est centré en 90 et contenu dans $]70\,;120[$. Donc $P(70 < X < 120) \geqslant P\big(|X - 90| < 20\big) \geqslant 1 - \dfrac{81}{400} = 0{,}7975$.
6. $P(72 < X < 108) = P(73 \leqslant X \leqslant 107) \approx 0{,}948$, bien au-dessus de la garantie $0{,}75$: l'inégalité est loin d'être optimale.

Exercice 4

1. $E(X) = -2 \times \dfrac{1}{8} + 0 + 2 \times \dfrac{1}{8} = 0$. $V(X) = 4 \times \dfrac{1}{8} + 0 + 4 \times \dfrac{1}{8} = 1$. $\sigma(X) = 1$.
2. $P\big(|X| \geqslant 2\big) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4}$, et la borne vaut $\dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$: il y a égalité.
3. $P\big(|X| \geqslant 3\big) = 0$, et la borne vaut $\dfrac{1}{9}$: l'inégalité est stricte.
4. $E(Y) = 0$ par symétrie. $V(Y) = 2 \times \dfrac{1}{2a^2} \times a^2 = 1$. $P\big(|Y| \geqslant a\big) = \dfrac{1}{a^2}$, et la borne vaut $\dfrac{V(Y)}{a^2} = \dfrac{1}{a^2}$: il y a égalité.
5. Pour $k \geqslant 1$, la loi de Y avec $a = k$ vérifie $\sigma = 1$ et $P\big(|Y| \geqslant k\sigma\big) = \dfrac{1}{k^2}$. Une borne plus petite serait donc fausse pour cette loi : on ne peut pas améliorer $\dfrac{1}{k^2}$ pour **toutes** les lois. La phrase « loin d'être optimale » concerne les lois usuelles : c'est la contrepartie du caractère universel de l'inégalité.

Exercice 5

1. $E(M_{36}) = 30$; $V(M_{36}) = \dfrac{36}{36} = 1$; $\sigma(M_{36}) = 1$.
2. $P\big(|M_{36} - 30| \geqslant 2\big) \leqslant \dfrac{36}{36 \times 2^2} = \dfrac{1}{4}$.
3. $E(S_{36}) = 36 \times 30 = 1\,080$. *On divise par n pour se ramener à la moyenne.* $|S_{36} - 1\,080| \geqslant 90$ est le même événement que $|M_{36} - 30| \geqslant 2{,}5$. Donc la probabilité est au plus $\dfrac{36}{36 \times 2{,}5^2} = \dfrac{1}{6{,}25} = 0{,}16$.
4. $P(27 < M_{36} < 33) = P\big(|M_{36} - 30| < 3\big) \geqslant 1 - \dfrac{36}{36 \times 3^2} = \dfrac{8}{9} \approx 0{,}889$.
5. Pour $n = 100$: $\dfrac{36}{100 \times 4} = 0{,}09$.

Exercice 6

1. $\mu = 240 \times 0{,}25 + 250 \times 0{,}5 + 260 \times 0{,}25 = 250$. $V = 0{,}25 \times 100 + 0 + 0{,}25 \times 100 = 50$. $\sigma = \sqrt{50} \approx 7{,}07$.
2. $P\big(|M_{50} - 250| \geqslant 2\big) \leqslant \dfrac{50}{50 \times 4} = 0{,}25$. $P\big(|M_{200} - 250| \geqslant 2\big) \leqslant \dfrac{50}{200 \times 4} = 0{,}0625$.
3. Pour un seul fromage, la borne vaudrait $\dfrac{50}{4} = 12{,}5$: elle dépasse 1 et ne dit rien.
4. $\sigma(M_{50}) = \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{50}} = 1$. Avec $k = 3$: $P\big(|M_{50} - 250| \geqslant 3\big) \leqslant \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9} \approx 0{,}111$.
5. $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$: pour la diviser par 3, il faut multiplier $\sqrt{n}$ par 3, donc n par 9.

Exercice 7

On utilise $n \geqslant \dfrac{V}{\alpha\,\delta^2}$, et on arrondit à l'entier supérieur si nécessaire.

1. $\delta = 1$, $\alpha = 0{,}05$: $n \geqslant \dfrac{25}{0{,}05 \times 1} = 500$. Il suffit de 500 sachets.
2. $\delta = 1$, $\alpha = 0{,}01$: $n \geqslant \dfrac{25}{0{,}01} = 2\,500$.
3. $\delta = 0{,}5$, $\alpha = 0{,}05$: $n \geqslant \dfrac{25}{0{,}05 \times 0{,}25} = 2\,000$, soit 4 fois plus qu'à la question 1 : diviser la précision par 2 multiplie la taille par 4.
4. $\delta = 0{,}7$, $\alpha = 0{,}1$: $n \geqslant \dfrac{25}{0{,}1 \times 0{,}49} \approx 510{,}2$. Il suffit de 511 sachets.
5. Il faut $\dfrac{25}{1\,000\,\delta^2} \leqslant 0{,}05$, soit $\delta^2 \geqslant 0{,}5$, soit $\delta \geqslant \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71$. On peut garantir une précision d'environ $0{,}71$ gramme.

Exercice 8

1. $\left(p - \dfrac{1}{2}\right)^2 = p^2 - p + \dfrac{1}{4} \geqslant 0$, donc $p - p^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$, c'est-à-dire $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
2. $n \geqslant \dfrac{1}{4 \times 0{,}1 \times 0{,}04^2} = 1\,562{,}5$. Il suffit de $1\,563$ foyers.
3. $P\big(|F_{1\,000} - p| \geqslant 0{,}05\big) \leqslant \dfrac{1}{4 \times 1\,000 \times 0{,}05^2} = 0{,}1$.
4. La fonction $p \mapsto p(1-p)$ est croissante sur $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$. Donc, pour $p \leqslant 0{,}2$, $p(1-p) \leqslant 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$. Il suffit alors que $n \geqslant \dfrac{0{,}16}{0{,}1 \times 0{,}04^2} = 1\,000$.
5. Non. L'inégalité donne une condition suffisante, pas nécessaire : elle est loin d'être optimale, et une taille plus petite peut convenir.

Exercice 9

1. $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \dfrac{V}{n}$ (chapitre 15).
2. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à M_n : pour tout $\delta > 0$, $P\big(|M_n - \mu| \geqslant \delta\big) \leqslant \dfrac{V(M_n)}{\delta^2} = \dfrac{V}{n\,\delta^2}$.
3. Soit $\delta > 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant P\big(|M_n - \mu| \geqslant \delta\big) \leqslant \dfrac{V}{n\,\delta^2}$. Comme $\dfrac{V}{\delta^2}$ est une constante et que $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0, le majorant tend vers 0. D'après le théorème des gendarmes, la probabilité tend vers 0.
4. $V = 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21$. La borne est $\dfrac{0{,}21}{n \times 0{,}01^2}$. Elle est au plus $0{,}001$ dès que $n \geqslant \dfrac{0{,}21}{0{,}001 \times 0{,}0001} = 2\,100\,000$.
5. $P\big(|F_n - 0{,}3| < 0{,}01\big) = 1 - P\big(|F_n - 0{,}3| \geqslant 0{,}01\big)$, qui tend vers $1 - 0 = 1$ d'après la loi des grands nombres.

Exercice 10

1. **Faux.** Les lancers sont indépendants : la probabilité de pile vaut toujours $0{,}5$. Le hasard ne compense pas.
2. **Vrai.** C'est la loi des grands nombres, appliquée à la fréquence F_n, moyenne d'un échantillon d'une loi de Bernoulli de paramètre $0{,}5$.
3. **Faux.** $P(S_{100} = 50) = \binom{100}{50} \times 0{,}5^{100} \approx 0{,}080$, et $P(S_{10\,000} = 5\,000) \approx 0{,}008$: cette probabilité diminue. La loi des grands nombres ne dit pas que F_n vaut exactement $0{,}5$.
4. **Faux.** $\sigma\left(S_n - \dfrac{n}{2}\right) = \sigma(S_n) = \dfrac{\sqrt{n}}{2}$, qui tend vers $+\infty$. C'est la moyenne qui se concentre, pas la somme.
5. **Vrai.** L'inégalité de concentration donne la borne $\dfrac{1}{4n\,\delta^2}$, qui est au plus $0{,}001$ dès que $n \geqslant \dfrac{250}{\delta^2}$.

Exercice 11

1. $P(X = 0) = 0{,}8$ et $P(X = 5) = 0{,}2$. Donc $\mu = 1$, $V = 0{,}8 \times 1 + 0{,}2 \times 16 = 4$, $\sigma = 2$.
2. `return sum(ech) / n`
3. Elle contient $1\,000$ nombres : les moyennes de $1\,000$ échantillons simulés, chacun de taille 400.
4. $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{4}{20} = 0{,}2$. L'instruction est `proportion(moyennes(1000, 400), 1, 0.2)`.
5. Avec $k = 2$, l'inégalité donne $P\big(|M_n - \mu| < 0{,}2\big) \geqslant 1 - \dfrac{1}{4} = 0{,}75$. La proportion observée devrait donc être au moins proche de $0{,}75$. *(En pratique, elle est bien plus grande.)*

Exercice 12

1. $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ vaut $\dfrac{2}{5} = 0{,}4$; $\dfrac{2}{10} = 0{,}2$; $\dfrac{2}{20} = 0{,}1$. Les valeurs de s en sont très proches ($0{,}401$; $0{,}195$; $0{,}096$).
2. $\dfrac{0{,}401}{0{,}195} \approx 2{,}06$ et $\dfrac{0{,}195}{0{,}096} \approx 2{,}03$: s est divisé par environ 2. C'est conforme au facteur $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
3. La garantie vaut $0{,}75$ pour $k = 2$. Les proportions observées, proches de $0{,}97$, la dépassent largement : l'inégalité de concentration est loin d'être optimale.
4. Non. Une simulation donne des valeurs approchées, qui changent à chaque exécution : elle permet de conjecturer ou d'illustrer un résultat, pas de le démontrer.

Exercice 13

1. $E(S_n) = pn$ et $V(S_n) = np(1-p)$. Avec $\delta = \sqrt{n}$: $P\big(|S_n - pn| \geqslant \sqrt{n}\big) \leqslant \dfrac{np(1-p)}{n} = p(1-p)$. L'événement « $> \sqrt{n}$ » est contenu dans l'événement « $\geqslant \sqrt{n}$ », donc sa probabilité est encore au plus $p(1-p)$.
2. $pn = 4{,}5$ et $\sqrt{n} = 3$. La condition $|k - 4{,}5| > 3$ est vraie pour $k \in \{0, 1, 8, 9\}$. La fonction renvoie $(1 + 9 + 9 + 1) \times 0{,}5^9 = \dfrac{20}{512} = 0{,}0390625$.
3. La borne vaut $0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21$. Les vraies valeurs sont environ 8 à 10 fois plus petites.
4. Parce que l'événement « écart $> \sqrt{n}$ » est inclus dans l'événement « écart $\geqslant \sqrt{n}$ » : sa probabilité est plus petite, et la même borne convient.

Une solution de Barrolech

Exercice 14

1. $E(X_i) = 1 \times \dfrac{1}{2} + (-1) \times \dfrac{1}{2} = 0$. $V(X_i) = 1^2 \times \dfrac{1}{2} + (-1)^2 \times \dfrac{1}{2} = 1$. Par linéarité, $E(S_n) = 0$. Les étapes étant indépendantes, $V(S_n) = n$, et $\sigma(S_n) = \sqrt{n}$.
2. Sur 4 étapes, si le pion avance j fois, alors $S_4 = 2j - 4$, et j suit la loi $\mathcal{B}(4\,;0{,}5)$.

s	-4	-2	0	2	4
$P(S_4 = s)$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{4}{16}$	$\dfrac{6}{16}$	$\dfrac{4}{16}$	$\dfrac{1}{16}$

Par symétrie, $E(S_4) = 0$. Donc $V(S_4) = 16 \times \dfrac{2}{16} + 4 \times \dfrac{8}{16} + 0 = 2 + 2 = 4$.

3. $\sigma(S_{100}) = 10$, et $20 = 2\sigma$: $P\big(|S_{100}| \geqslant 20\big) \leqslant \dfrac{1}{4}$. La vraie valeur, environ $0{,}057$, est plus de quatre fois plus petite.
4. $E(M_n) = 0$ et $V(M_n) = \dfrac{1}{n}$. Donc $P\big(|M_n| \geqslant 0{,}1\big) \leqslant \dfrac{1}{n \times 0{,}01} = \dfrac{100}{n}$, qui tend vers 0. D'après le théorème des gendarmes, la limite vaut 0.
5. `marche(400)[400]`, car la liste `positions` commence à l'indice 0 avec la position de départ.
6. Non : $\sigma(S_n) = \sqrt{n}$ grandit, et la position s'étale autour de 0. En revanche, M_n se rapproche de 0 : le déplacement moyen par étape devient négligeable.

Une solution de BarroTech