Vecteurs, droites et plans de l'espace

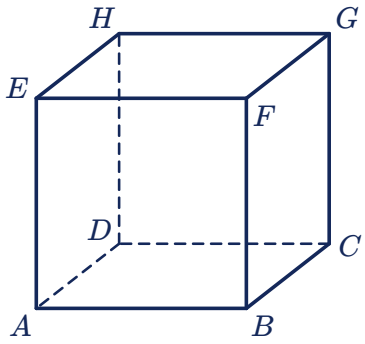
CD

Deux exercices par leçon. Les corrigés détaillés sont dans la fiche « Corrigés ». Dans tous les exercices, $ABCDEFGH$ est le cube du cours : $ABCD$ est la face du bas, et E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

Leçon 1 : vecteurs de l'espace, translations, combinaisons linéaires

Exercice 1 : calculer et construire dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube.



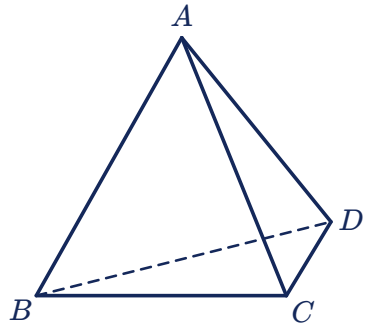
Le cube ABCDEFGH

1. Pour chaque somme, donner un vecteur égal dont l'origine et l'extrémité sont des sommets du cube.
   a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}$ b. $\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{BA}$ c. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}$ d. $\overrightarrow{HG}-\overrightarrow{BC}$
2. Exprimer $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. Placer sur la figure les points M, N, P définis par : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
   Préciser la position de chacun de ces points.
4. Quelles sont les images de A, D, H, E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$? En déduire l'image de la face $ADHE$.

Une solution de BarroTech

Exercice 2 : calcul vectoriel dans un tétraèdre

$ABCD$ est un tétraèdre.



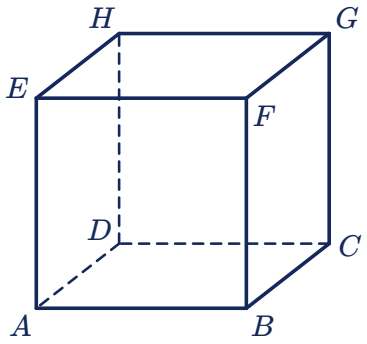
Le tétraèdre ABCD

1. Simplifier $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BD}$.
2. I est le milieu de $[BC]$. Montrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$.
3. Le point E est défini par $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABEC$? Montrer que I est le milieu de $[AE]$.
4. J est le milieu de $[AD]$. Montrer que $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}\right)$.

Leçon 2 : droites de l'espace

Exercice 3 : droites parallèles dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube. O est le centre de la face $ABCD$ et M celui de la face $EFGH$.

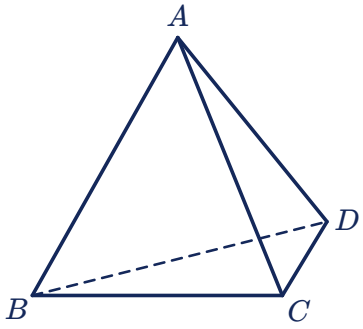


Le cube ABCDEFGH

1. Exprimer $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AE}$. Que peut-on dire des droites (OM) et (AE) ?
3. On note d la droite passant par E et de vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$. Montrer que G et M appartiennent à d.
4. I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[HG]$. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. En déduire que la droite (IJ) est parallèle à (AH) et à (BG).

Exercice 4 : alignements par le calcul vectoriel

$ABCD$ est un tétraèdre.



Le tétraèdre ABCD

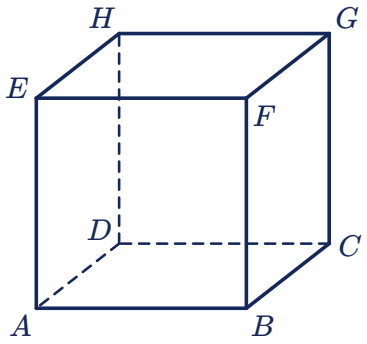
1. Le point E est défini par $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. Montrer que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DB}$. En déduire que B, D, E sont alignés, et préciser la position de B.
2. Le point F est défini par $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}$. Montrer que B, C, F sont alignés.
3. Les points M et N sont définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Une solution de BarroTech

Leçon 3 : plans de l'espace

Exercice 5 : vecteurs et points coplanaires dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube.

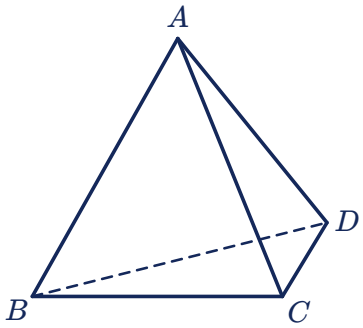


Le cube ABCDEFGH

1. Montrer que $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}$. En déduire que les points B, C, H, E sont coplanaires.
2. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par E et dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   a. Montrer que F, G et H appartiennent à $\mathcal{P}$. Quel est ce plan ?
   b. Le point A appartient-il à $\mathcal{P}$? Justifier.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont-ils coplanaires ? Justifier sans calcul.

Exercice 6 : des vecteurs coplanaires, des droites qui ne le sont pas

$ABCD$ est un tétraèdre ; I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[CD]$.



Le tétraèdre ABCD

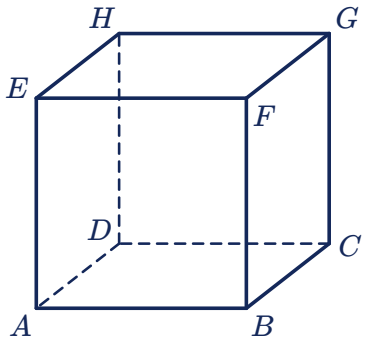
1. Justifier que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$ et que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$.
2. En additionnant ces deux égalités, montrer que $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
3. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires.
4. Les droites (AD) et (BC) sont-elles coplanaires ? Commenter.

Une solution de BarroTech

Leçon 4 : positions relatives de droites et de plans

Exercice 7 : positions relatives dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube. Justifier chaque réponse.



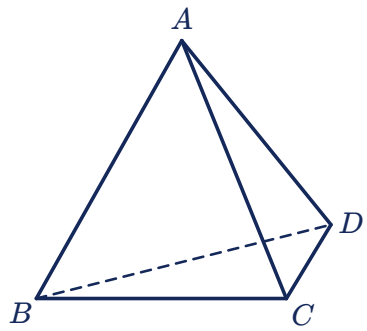
Le cube ABCDEFGH

1. Position relative des droites :
   a. (AB) et (GH) ; b. (AE) et (BC) ; c. (EG) et (FH) ; d. (AG) et (CE) ; e. (BG) et (AH).
2. Position relative de la droite et du plan :
   a. (EG) et (ABC) ; b. (BG) et (ADH) ; c. (AG) et (BCF) ; d. (FH) et (EFG).
3. Position relative des plans :
   a. (ABC) et (EFG) ; b. (ABF) et (DCG) ; c. (ABC) et (ABF).
4. On note P le centre de la face $ADHE$ et Q celui de la face $BCGF$. Montrer que P et Q appartiennent aux plans (ABG) et (DCF), puis déterminer l'intersection de ces deux plans.

Exercice 8 : plans parallèles dans un tétraèdre

$ABCD$ est un tétraèdre. I, J, K sont les milieux de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, et M est le milieu de $[CD]$.

Une solution de BarroTech



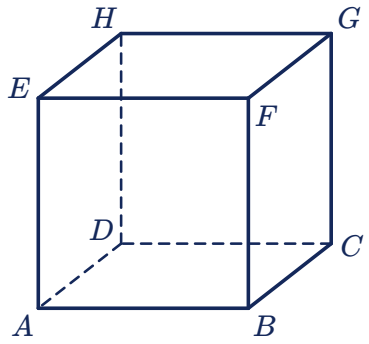
Le tétraèdre ABCD

1. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).
2. Montrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.
3. Déterminer l'intersection des plans (ABM) et (ACD), puis celle des plans (ABM) et (BCD).
4. En déduire la position relative de la droite (BM) et du plan (IJK).

Leçon 5 : bases et repères de l'espace

Exercice 9 : coordonnées dans un cube

On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



Le cube ABCDEFGH

1. Donner les coordonnées des huit sommets du cube.
2. I est le milieu de $[FG]$, J celui de $[EH]$, et K le centre de la face $BCGF$. Calculer leurs coordonnées.
3. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ et de $\overrightarrow{IK}$. Que peut-on dire des droites (IJ) et (AB) ? Et des droites (IK) et (AE) ?
4. a. Lire sur la figure si $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AG})$ sont des bases de l'espace.
   b. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AE}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AG})$.
   c. On a $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. En supposant qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AC}=a\overrightarrow{AF}+b\overrightarrow{AH}$, aboutir à une contradiction. En déduire que $(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AC})$ est une base.

Exercice 10 : un spectacle de drones

Lors d'un spectacle de drones lumineux, on repère les positions dans un repère de l'espace dont l'unité est le mètre. Un drone passe par les points $A(20\,;0\,;10)$, $B(30\,;20\,;30)$ et $C(50\,;60\,;70)$; un second drone est immobile en $D(10\,;40\,;30)$.

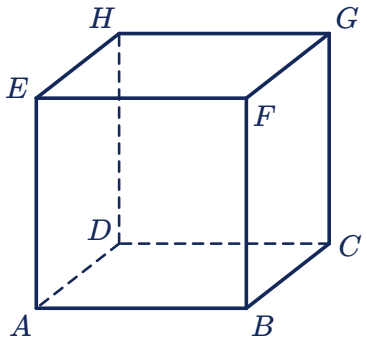
Une solution de Barrotech

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$. Le premier drone peut-il aller de A à C en ligne droite en passant par B ?
2. Un troisième drone doit se placer au milieu I de $[AD]$. Calculer les coordonnées de I.
3. Un quatrième drone doit se placer en E, de sorte que $ABED$ soit un parallélogramme. Calculer les coordonnées de E, puis vérifier que $[AE]$ et $[BD]$ ont le même milieu.
4. Les vecteurs $\vec{u}\,(2\,;-1\,;4)$ et $\vec{v}\left(-3\,;\frac{3}{2}\,;-6\right)$ sont-ils colinéaires ? Et $\vec{u}$ et $\vec{w}\,(4\,;-2\,;7)$?
5. Déterminer le réel m tel que $\vec{a}\,(m\,;2\,;-3)$ et $\vec{b}\,(4\,;-4\,;6)$ soient colinéaires.

Leçon 6 : problèmes de configuration dans l'espace

Exercice 11 : la grande diagonale coupée en trois

$ABCDEFGH$ est un cube. Les points K et L sont définis par $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. On travaille dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



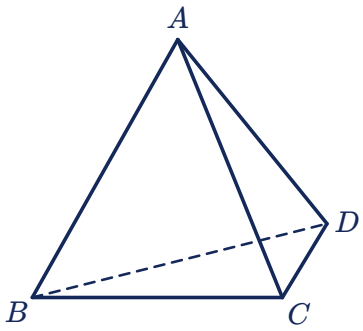
Le cube ABCDEFGH

1. Exprimer $\overrightarrow{AL}$, puis $\overrightarrow{CL}$, dans cette base.
2. Exprimer $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CH}$ dans cette base. En déduire que $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CH}$, puis que L appartient au plan (CFH).
3. Montrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles et distincts.
4. On a vu dans le cours (exemple 23) que K appartient au plan (BDE). Montrer que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{LG}$. Interpréter.

Exercice 12 : les milieux des arêtes d'un tétraèdre

Un presse-papier en verre a la forme d'un tétraèdre $ABCD$. On note I, J, K, L, M, N les milieux des arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AC]$ et $[BD]$. On travaille dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

Une solution de BarroTech



Le tétraèdre ABCD

1. Pourquoi est-ce bien un repère de l'espace ? Donner les coordonnées de A, B, C, D, puis celles des six milieux.
2. Calculer les coordonnées des milieux des segments $[IK]$, $[JL]$ et $[MN]$. Que constate-t-on ?
3. On note G ce point. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.
4. Le point P est défini par $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$. Montrer que les points D, G, P sont alignés.