Vecteurs, droites et plans de l'espace

TERMINALE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Chaque résultat a été vérifié par calcul formel. Les rappels de méthode sont en italique. Dans le cube, on utilise sans le redire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$.

Exercice 1

Pour simplifier une somme, on remplace un vecteur par un vecteur égal qui « enchaîne » avec le précédent, puis on applique la relation de Chasles.

1. a. $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$, donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$.
   b. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{FE}$, donc $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FH}$.
   c. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$.
   d. $\overrightarrow{HG} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{GF}$, donc la somme vaut $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HF}$.
2. *On choisit un chemin le long des arêtes.*
   - $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.
   - $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.
   - $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.
3. *On part de A et on ajoute les vecteurs un par un.*
   - $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$: M est le **milieu de** $[BF]$.
   - $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$, donc $\overrightarrow{EN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$: N est le milieu de $[EG]$, le **centre de la face** $EFGH$.
   - $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$: P est le **milieu de** $[CG]$.
4. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$, donc la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ envoie A sur B, D sur C, H sur G et E sur F. L'image de la face $ADHE$ est la face opposée $BCGF$.

Une solution de BarroTech

Exercice 2

1. Par la relation de Chasles, $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.
   Pour $\vec{v}$: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB}$. Donc $\vec{v} = 2\overrightarrow{CB}$.
2. I est le milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Alors
   $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AI} + \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) = 2\overrightarrow{AI}.$$
3. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$: $ABEC$ est un **parallélogramme** (règle du parallélogramme). De plus, d'après la question 2, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$: I est le **milieu de** $[AE]$. On retrouve que les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu.

4. On décompose $\overrightarrow{IJ}$ de deux façons :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ}.$$

En additionnant, et comme $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{DJ} = \vec{0}$ (J milieu de $[AD]$) : $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$, d'où $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}\right)$.

Exercice 3

1. O est le milieu de $[AC]$: $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
   M est le milieu de $[EG]$: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.
2. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE}$. Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont égaux, donc colinéaires : les droites (OM) **et** (AE) **sont parallèles** (et aussi parallèles à (BF), (CG), (DH)).
3. *Un point X est sur d si, et seulement si, $\overrightarrow{EX} = t\,\overrightarrow{AC}$ pour un réel t.*
   $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ ($t = 1$) : $G \in d$.
   $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ($t = \frac{1}{2}$) : $M \in d$.
4. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.
   Or $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$: (IJ) **est parallèle à** (AH) **et à** (BG).

Exercice 4

Une solution de BarroTech

1. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires ($\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BD}$) : B, D, E sont **alignés**. Et $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BE}$ signifie que B **est le milieu de** $[DE]$.
2. $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} = 4\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = 4\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = 4\overrightarrow{BC}$.
   $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires : B, C, F **sont alignés**.
3. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
   Les vecteurs directeurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires : $(MN) \parallel (BC)$.

Exercice 5

1. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} + \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}\right)$, et $\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ (exercice 1) : les deux sont égaux.
   Comme $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires, $\overrightarrow{BH}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BH}$ sont coplanaires, donc B, C, H, E **sont coplanaires**. (Ils forment le rectangle $BCHE$.)
2. a. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$: ces trois vecteurs s'écrivent $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, donc F, G, H sont dans $\mathcal{P}$. Le plan $\mathcal{P}$ est le **plan de la face du haut,** (EFG).
   b. $A \in \mathcal{P}$ signifierait $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$: alors $\overrightarrow{AE}$ serait combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, et $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ seraient coplanaires. Ce n'est pas le cas (E n'est pas dans le plan de la face du bas). Donc $A \notin \mathcal{P}$.

3. $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH}$: ces deux vecteurs sont colinéaires. Alors, avec $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BF}$ (non colinéaires), $\overrightarrow{DH} = 0 \times \overrightarrow{AC} + 1 \times \overrightarrow{BF}$: **les trois vecteurs sont coplanaires**. *Trois vecteurs dont deux sont colinéaires sont toujours coplanaires.*

Exercice 6

1. Ce sont deux chemins de I à J : $I \to A \to D \to J$ et $I \to B \to C \to J$ (relation de Chasles).
2. En additionnant : $2\overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \left(\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{CJ}\right)$.
   I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; J est le milieu de $[CD]$, donc $\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$. Il reste $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
3. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires (sinon (AD) et (BC) seraient parallèles et A, B, C, D coplanaires). Donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ **sont coplanaires**.
4. Si (AD) et (BC) étaient dans un même plan, les quatre points A, B, C, D le seraient aussi : impossible pour un tétraèdre. Les droites (AD) **et** (BC) **ne sont pas coplanaires**.
   Commentaire : des vecteurs coplanaires ne donnent pas des droites coplanaires. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ sont dans une même direction de plan, mais les droites (IJ), (AD), (BC) sont dans des plans parallèles différents.

Exercice 7

Une solution de BarroTech

1. a. $\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{AB}$: (AB) et (GH) sont **parallèles**, et distinctes ($G \notin (AB)$).
   b. (AE) et (BC) n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles ($\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires) : elles sont **non coplanaires**.
   c. (EG) et (FH) sont les diagonales du carré $EFGH$: **sécantes** au centre de la face.
   d. A, C, G, E sont coplanaires (rectangle $ACGE$), et $[AG]$, $[CE]$ en sont les diagonales : **sécantes** au centre du cube.
   e. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH}$: **parallèles** et distinctes.
2. a. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ est dans la direction de (ABC) et $E \notin (ABC)$: (EG) est **strictement parallèle** à (ABC).
   b. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$, et (AH) est contenue dans (ADH) ; $B \notin (ADH)$: (BG) est **strictement parallèle** à (ADH).
   c. $G \in (BCF)$ mais $A \notin (BCF)$: la droite (AG) n'est pas contenue dans le plan, et elle n'est pas strictement parallèle puisqu'elle a le point G en commun. Elle est **sécante** à (BCF) en G.
   d. F et H sont dans (EFG) : (FH) est **contenue** dans (EFG).
3. a. (ABC) et (EFG) ont la même direction ($\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$) et $E \notin (ABC)$: **strictement parallèles**.
   b. (ABF) est dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$, (DCG) par $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$: même direction ; $D \notin (ABF)$: **strictement parallèles**.
   c. (ABC) et (ABF) sont distincts ($F \notin (ABC)$) et ont deux points communs A et B : **sécants selon la droite** (AB).

4. P est le milieu de $[AH]$ et de $[DE]$; Q est le milieu de $[BG]$ et de $[CF]$.
   - A, B, G, H sont coplanaires (exemple 11 du cours) : le plan (ABG) contient $[AH]$ et $[BG]$, donc P et Q.
   - De même, D, C, F, E sont coplanaires ($\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE}$, car $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$) : le plan (DCF) contient $[DE]$ et $[CF]$, donc P et Q.
   - Les plans sont distincts ($A \notin (DCF)$). Ils ont deux points communs distincts : ils sont **sécants selon la droite** (PQ). Comme $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$, cette droite est parallèle à (AB) ; elle passe par les centres des faces $ADHE$ et $BCGF$.

Exercice 8

1. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
   $\overrightarrow{IJ}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$, et (BC) est contenue dans (BCD) : (IJ) **est parallèle au plan** (BCD).
2. De même, $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires (car $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne le sont pas) ; ils dirigent (IJK) et sont dans la direction de (BCD). Les deux plans ont la même direction : **ils sont parallèles**. Ils sont même strictement parallèles : si I était dans (BCD), la droite $(IB) = (AB)$ y serait, et A aussi, ce qui est faux.
3. *Pour l'intersection de deux plans distincts, on cherche deux points communs.*
   - (ABM) et (ACD) : A est dans les deux ; M, milieu de $[CD]$, est dans (ACD) et dans (ABM). Les plans sont distincts ($B \notin (ACD)$). Leur intersection est **la droite** (AM).
   - (ABM) et (BCD) : B et M sont dans les deux, et les plans sont distincts ($A \notin (BCD)$). Leur intersection est **la droite** (BM).
4. (BM) est contenue dans (BCD), plan strictement parallèle à (IJK). Donc (BM) n'a aucun point commun avec (IJK), et son vecteur directeur $\overrightarrow{BM}$ est dans la direction commune : (BM) **est strictement parallèle au plan** (IJK).

Une solution de BarroTech

Exercice 9

1. $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $C(1\,;1\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$, $E(0\,;0\,;1)$, $F(1\,;0\,;1)$, $G(1\,;1\,;1)$, $H(0\,;1\,;1)$.
   Par exemple, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ *donne* $G(1\,;1\,;1)$.
2. *Milieu : moyenne des coordonnées.* $I\left(1\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$, $J\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$. Le centre K de $BCGF$ est le milieu de $[BG]$: $K\left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.
3. $\overrightarrow{IJ}\,(0-1\,;\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,;\ 1-1) = (-1\,;0\,;0)$, donc $\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB}$: $(IJ) \parallel (AB)$.
   $\overrightarrow{IK}\left(0\,;0\,;-\frac{1}{2}\right)$, donc $\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$: $(IK) \parallel (AE)$.

4. a. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires (dans la face du bas), donc **ce n'est pas une base**. En revanche, la droite (AG) coupe le plan (ABD) en A seulement : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires, **c'est une base**.
b. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donne $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AG}$: coordonnées $(-1\,;-1\,;1)$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG})$.
c. Si $\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AF} + b\overrightarrow{AH}$, alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD} + (a+b)\overrightarrow{AE}.$$

Par unicité de la décomposition dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: $a = 1$, $b = 1$ et $a + b = 0$. C'est impossible, car $1 + 1 = 2$. Donc $\overrightarrow{AC}$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$; comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas coplanaires : $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC})$ **est une base**.

Exercice 10

1. $\overrightarrow{AB}\,(30-20\,;\ 20-0\,;\ 30-10) = (10\,;20\,;20)$ et $\overrightarrow{AC}\,(30\,;60\,;60)$.
$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$: les vecteurs sont colinéaires, donc A**,** B**,** C **sont alignés**. Le drone peut aller de A à C en ligne droite en passant par B, situé au tiers du trajet ($\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$).

2. $I\left(\dfrac{20+10}{2}\,;\ \dfrac{0+40}{2}\,;\ \dfrac{10+30}{2}\right) = (15\,;20\,;20)$.

3. $ABED$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$, c'est-à-dire $x_E - 10 = 10$, $y_E - 40 = 20$, $z_E - 30 = 20$. Donc $E(20\,;60\,;50)$.
Contrôle : le milieu de $[AE]$ est $\left(\frac{20+20}{2}\,;\ \frac{0+60}{2}\,;\ \frac{10+50}{2}\right) = (20\,;30\,;30)$, et celui de $[BD]$ est $\left(\frac{30+10}{2}\,;\ \frac{20+40}{2}\,;\ \frac{30+30}{2}\right) = (20\,;30\,;30)$. Ce sont les mêmes.

4. $-\frac{3}{2} \times 2 = -3$, $-\frac{3}{2} \times (-1) = \frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2} \times 4 = -6$: $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$, **colinéaires**.
Pour $\vec{w}$: on passe de 2 à 4 et de -1 à -2 en multipliant par 2, mais $2 \times 4 = 8 \neq 7$. Les coordonnées ne sont pas proportionnelles : $\vec{u}$ **et** $\vec{w}$ **ne sont pas colinéaires**.

5. Les deuxièmes et troisièmes coordonnées donnent $\vec{b} = -2\vec{a}$ ($-2 \times 2 = -4$ et $-2 \times (-3) = 6$). Il faut donc $4 = -2m$, soit $m = -2$. Vérification : $\vec{a}\,(-2\,;2\,;-3)$ et $-2\vec{a}\,(4\,;-4\,;6) = \vec{b}$.

Exercice 11

1. $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.
$\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AL} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

2. $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$. Alors

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{CF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CL}.$$

$\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CH}$ ne sont pas colinéaires, et $\overrightarrow{CL}$ est leur combinaison linéaire : $L \in (CFH)$.

3. $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE}$. Les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$, qui dirigent (BDE), dirigent aussi (CFH) : **les plans sont parallèles**. Ils sont distincts, car $C \notin (BDE)$: sinon on aurait $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = x(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + y(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE})$, d'où $y = 0$, $x = 1$ et $-x - y = 0$, impossible.
4. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$; $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$; $\overrightarrow{LG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Donc $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{LG}$.
   Interprétation : les deux plans parallèles (BDE) et (CFH) coupent la grande diagonale $[AG]$ en K et L, et la partagent en **trois segments de même longueur**.

Exercice 12

1. $ABCD$ est un tétraèdre : ses quatre sommets ne sont pas coplanaires, donc $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires et forment une base. Avec l'origine A, c'est un repère.
   $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $C(0\,;1\,;0)$, $D(0\,;0\,;1)$, puis, avec les moyennes : $I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)$, $J\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$, $K\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, $L\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$, $M\left(0\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$, $N\left(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$.
2. Milieu de $[IK]$: $\left(\frac{\frac{1}{2}+0}{2}\,;\frac{0+\frac{1}{2}}{2}\,;\frac{0+\frac{1}{2}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right)$. De même, les milieux de $[JL]$ et de $[MN]$ ont pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right)$.
   Les trois segments qui joignent les milieux des arêtes opposées ont le même milieu.
3. $G\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right)$, donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.
4. $P\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;0\right)$. Alors $\overrightarrow{DP}\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;-1\right)$ et $\overrightarrow{DG}\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\,;-\frac{3}{4}\right)$. Or $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4} \times (-1) = -\frac{3}{4}$: $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DP}$. Les vecteurs sont colinéaires : D, G, P **sont alignés**.
   Pour aller plus loin : P est le centre de gravité du triangle ABC, et G se trouve aux trois quarts du segment $[DP]$ en partant de D.

Une solution de BarcTech