Calcul vectoriel et produit scalaire

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · EXERCICES

Deux exercices par leçon, dans l'ordre des vidéos. Corrigés détaillés : fiche des corrigés. Sans calculatrice, comme à l'épreuve anticipée.

Leçon 1 : vecteurs, norme, angle, projeté orthogonal

Exercice 1 : coordonnées, norme, nature d'un triangle

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1\,;2)$, $B(3\,;5)$ et $C(6\,;1)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{BC}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les longueurs AB, BC et AC.
3. Préciser la nature du triangle ABC.
4. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
5. Calculer les coordonnées du milieu de $[AC]$ et celles du milieu de $[BD]$. Que retrouve-t-on ?
6. Les vecteurs $\vec{u}\,(2\,;-3)$ et $\vec{v}\,(-6\,;9)$ sont-ils colinéaires ? Et $\vec{u}$ et $\vec{w}\,(3\,;-4)$?

Exercice 2 : projeté orthogonal et automatismes

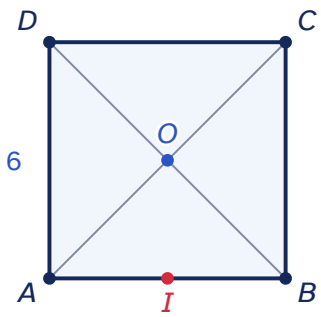
1. Soit $ABCD$ un carré de centre O. Donner le projeté orthogonal :
   - **a.** de C sur (AB)
   - **b.** de O sur (AB)
   - **c.** de B sur (AC)
   - **d.** de D sur (BC)
2. Soit ABC un triangle rectangle en A, avec $AB = 3$ et $AC = 4$, et H le projeté orthogonal de A sur (BC).
   - **a.** Calculer BC.
   - **b.** En écrivant l'aire du triangle de deux façons, calculer AH. Que représente cette longueur pour le point A et la droite (BC) ?
   - **c.** Donner $\cos\widehat{ABC}$, puis en déduire BH.
3. La toile d'un store banne mesure 2 mètres et fait un angle de $30°$ avec l'horizontale. Sous une lumière verticale, quelle est la longueur de son ombre sur le sol ? *Aide au calcul :* $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.
4. Dans un triangle ABC, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$. On a $AM = 2$, $AB = 5$ et $BC = 10$. Calculer MN.

Une solution de BarroTech

Leçon 2 : produit scalaire par la projection orthogonale

Exercice 3 : dans un carré

$ABCD$ est un carré de côté 6 et de centre O. Le point I est le milieu de $[AB]$.



À l'aide de projections, calculer les produits scalaires suivants.

- **a.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
- **b.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- **c.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$
- **d.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
- **e.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$
- **f.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$
- **g.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$
- **h.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AO}$
- **i.** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO}$

Une solution de BarroTech

Exercice 4 : avec un pied de hauteur

Sur la figure 1, H est le projeté orthogonal de C sur (AB), avec $H \in [AB]$, $AH = 2$, $HB = 5$ et $CH = 3$. Sur la figure 2, H est encore le projeté de C, mais il est de l'autre côté de A : $AH = 2$ et $AB = 5$.

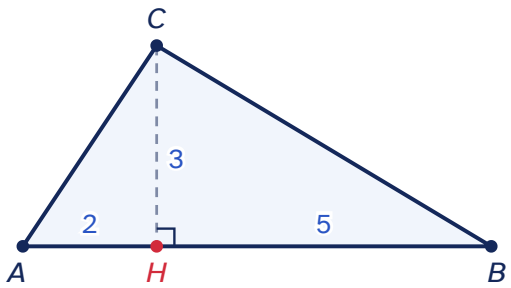


Figure 1

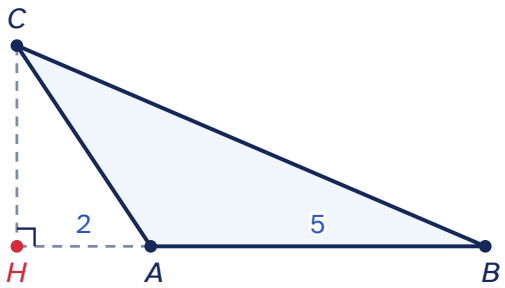


Figure 2

1. Sur la figure 1, calculer :
   - **a.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
   - **b.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
   - **c.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
   - **d.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH}$
2. Sur la figure 1, calculer AC^2 et BC^2.
3. Sur la figure 2, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Une solution de BarroTech

Leçon 3 : formule avec le cosinus, orthogonalité

Exercice 5 : calculer un produit, trouver un angle

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, où θ est l'angle des deux vecteurs.
   - **a.** $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 4, \theta = \dfrac{\pi}{3}$
   - **b.** $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 5, \theta = \dfrac{5\pi}{6}$
   - **c.** $\|\vec{u}\| = 6, \|\vec{v}\| = 1, \theta = \dfrac{\pi}{2}$
   - **d.** $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{2}, \|\vec{v}\| = 3, \theta = \dfrac{3\pi}{4}$
2. Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. Déterminer l'angle θ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   - **a.** $\|\vec{u}\| = 4, \|\vec{v}\| = 3, \vec{u} \cdot \vec{v} = 6$
   - **b.** $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = \sqrt{2}, \vec{u} \cdot \vec{v} = -2$
   - **c.** $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 5, \vec{u} \cdot \vec{v} = -25$
4. Vrai ou faux ? « Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. » Justifier.

Exercice 6 : le travail d'une force

Le travail d'une force constante $\vec{F}$, en joules, lors d'un déplacement de A à B est $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$, où la force est en newtons et la distance en mètres. *Aide au calcul :* $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

1. On pousse une tondeuse sur 30 mètres, avec une force de 50 newtons qui fait un angle de $60°$ avec le sol. Calculer le travail de cette force.
2. Sur un téléski, la perche tire un skieur sur 500 mètres, avec une force de 400 newtons qui fait un angle de $30°$ avec le déplacement. Calculer le travail exact, puis une valeur approchée.
3. Un randonneur marche sur un sol horizontal. La force qu'il exerce pour porter son sac est verticale. Quel est le travail de cette force ? Justifier.
4. Le vent exerce sur un cycliste une force de 20 newtons, de sens contraire à son déplacement de 100 mètres. Calculer le travail de cette force. Que signifie son signe ?
5. Une force de 50 newtons travaille de 250 joules sur 10 mètres. Quel angle fait-elle avec le déplacement ?

Leçon 4 : bilinéarité, symétrie

Exercice 7 : développer sans figure

On donne $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.

1. Calculer $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{v}$.
2. Calculer $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$.
3. Calculer $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} - \vec{v})$.
4. Calculer $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$.
5. Déterminer le réel k tel que $\vec{u} + k\vec{v}$ soit orthogonal à $\vec{v}$.

Une solution de BarroTech

Exercice 8 : Chasles, puis développement

$ABCD$ est un rectangle avec $AB = 5$ et $AD = 2$, et I est le milieu de $[DC]$.

1. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$.
3. En déduire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BI}$.
4. Dans un rectangle quelconque, quelle relation entre AB et AD assure que $(AI) \perp (BI)$?
5. Soit $ABCD$ un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires. En calculant $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$, montrer que c'est un losange.

Leçon 5 : en base orthonormée

Exercice 9 : calculs avec les coordonnées

La base est orthonormée.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
   - **a.** $\vec{u}\,(2\,;5)$, $\vec{v}\,(3\,;-1)$
   - **b.** $\vec{u}\,(-4\,;3)$, $\vec{v}\,(3\,;4)$
   - **c.** $\vec{u}\ \left(\sqrt{2}\,;1\right)$, $\vec{v}\ \left(\sqrt{2}\,;-3\right)$
   - **d.** $\vec{u}\ \left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{3}\right)$, $\vec{v}\,(4\,;-3)$
2. Calculer la norme de $\vec{a}\,(-4\,;3)$ et celle de $\vec{b}\,(1\,;-2)$.
3. Déterminer les réels m pour lesquels les deux vecteurs sont orthogonaux.
   - **a.** $(m\,;3)$ et $(4\,;-2)$
   - **b.** $(m\,;1)$ et $(m-4\,;3)$
4. Déterminer l'angle des deux vecteurs.
   - **a.** $\left(1\,;\sqrt{3}\right)$ et $\left(\sqrt{3}\,;1\right)$
   - **b.** $(1\,;0)$ et $(-1\,;1)$

Exercice 10 : un champ de lavande

Sur un plan, dont l'unité vaut 10 mètres, un champ de lavande a pour sommets $A(-1\,;1)$, $B(3\,;-1)$, $C(5\,;3)$ et $D(1\,;5)$.

1. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Montrer que $ABCD$ est un rectangle.
3. Montrer que $ABCD$ est un carré, puis donner son aire en mètres carrés.
4. Vérifier par un calcul que les diagonales sont perpendiculaires.
5. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
6. Déterminer le point P de l'axe des abscisses tel que $(AP) \perp (AB)$.

Leçon 6 : coordonnées et produits scalaires

Exercice 11 : changer de base

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne $\vec{e_1}\left(\frac{3}{5}\,;\frac{4}{5}\right)$, $\vec{e_2}\left(-\frac{4}{5}\,;\frac{3}{5}\right)$, $\vec{u}\,(5\,;10)$ et $\vec{v}\,(2\,;-1)$.

1. Montrer que $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base orthonormée.
2. Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ et celles de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.
3. Vérifier que $\vec{u}$ a la même norme dans les deux bases.
4. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacune des deux bases.
5. On prend maintenant $\vec{f_1}\,(\cos\theta\,;\sin\theta)$ et $\vec{f_2}\,(-\sin\theta\,;\cos\theta)$, avec $\theta = \frac{\pi}{4}$, et $\vec{w}\,(3\,;1)$. Calculer les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{f_1}, \vec{f_2})$, puis vérifier le résultat.

Exercice 12 : traverser une rivière en kayak

Une rivière de 40 mètres de large a des rives rectilignes. Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, où $\vec{\imath}$ pointe vers l'est et $\vec{\jmath}$ vers le nord, le vecteur $\vec{e_1}\left(\frac{3}{5}\,;\frac{4}{5}\right)$ suit la rive et $\vec{e_2}\left(-\frac{4}{5}\,;\frac{3}{5}\right)$ lui est perpendiculaire, vers la rive d'en face. Les vitesses sont en mètres par seconde.

1. Un kayak a pour vitesse $\vec{v}\,(1\,;3)$. Calculer $\vec{v} \cdot \vec{e_1}$ et $\vec{v} \cdot \vec{e_2}$, puis interpréter ces deux nombres.
2. Combien de temps met-il pour traverser ? De combien s'est-il déplacé le long de la rive pendant ce temps ?
3. Un second kayak a pour vitesse $\vec{w}\,(-1\,;2)$. Reprendre les questions 1 et 2.
4. Lequel des deux kayaks traverse le plus vite ? Lequel va le plus vite, en norme ?

Une solution de BrainTech

Leçon 7 : développements et normes

Exercice 13 : calculer avec des longueurs

1. On donne $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$. Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.
2. On donne $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 4$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.
3. Dans un triangle ABC, $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 7$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
4. Un parallélogramme a des côtés de longueurs 4 et 6, et une diagonale de longueur 8. Calculer la longueur de l'autre diagonale.

Exercice 14 : Pythagore et la médiane

1. Les triangles suivants sont-ils rectangles ? Justifier avec un produit scalaire.
   - **a.** côtés 5, 12 et 13
   - **b.** côtés 6, 7 et 9
2. Montrer que, si $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Qu'en déduit-on pour un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur ?
3. Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$.
   - **a.** Justifier que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ et que $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
   - **b.** En déduire que $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$.
   - **c.** Calculer AI lorsque $AB = 7$, $AC = 9$ et $BC = 8$.

Leçon 8 : formule d'Al-Kashi

Exercice 15 : côtés et angles

Dans un triangle ABC, on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. Calculer a dans chaque cas.
   - **a.** $b = 3$, $c = 8$, $\widehat{A} = 60°$
   - **b.** $b = 5$, $c = 3$, $\widehat{A} = 120°$
   - **c.** $b = 4$, $c = 6$, $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{3}$
   - **d.** $b = 2$, $c = 2\sqrt{2}$, $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{4}$
2. Calculer l'angle $\widehat{A}$ dans chaque cas.
   - **a.** $a = 7$, $b = 5$, $c = 8$
   - **b.** $a = 13$, $b = 7$, $c = 8$
3. Dans un triangle où $AB = 4$, $AC = 5$ et $BC = 6$, calculer le cosinus de chacun des trois angles.
4. Sans calculer d'angle, dire si le plus grand angle est aigu, droit ou obtus.
   - **a.** côtés 7, 8 et 10
   - **b.** côtés 9, 12 et 15
   - **c.** côtés 5, 9 et 11

Une solution de BarroTech

Exercice 16 : compas, étang et vigne

1. Les branches d'un compas mesurent 10 centimètres. Quel est l'écart entre les deux pointes lorsque l'angle des branches vaut $60°$? $90°$? $120°$?
2. Pour mesurer la largeur d'un étang entre deux points B et C, on se place en un point A, d'où l'on voit les deux. On mesure $AB = 300$ mètres, $AC = 500$ mètres et $\widehat{A} = 120°$. Calculer BC.
3. Une parcelle de vigne triangulaire a pour côtés $AB = 50$ mètres, $AC = 80$ mètres et $BC = 70$ mètres.
   - **a.** Calculer l'angle $\widehat{A}$.
   - **b.** Calculer la hauteur issue de C, puis l'aire de la parcelle. *Aide au calcul :* $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

Leçon 9 : transformation de MA · MB

Exercice 17 : un cercle, un point ou rien

Soit A et B deux points tels que $AB = 8$, et I le milieu de $[AB]$.

1. Démontrer que, pour tout point M, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 16$.
2. Calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ lorsque $MI = 5$, puis lorsque $M = I$, puis lorsque $M = A$.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que :
   - **a.** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 9$
   - **b.** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
   - **c.** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$
   - **d.** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -20$
4. Pour quel réel k l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ est-il un cercle de rayon 6 ?
5. Soit C un point tel que le triangle ABC soit rectangle en B, avec $BC = 3$. Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ de deux façons : avec la transformation, puis avec une projection.

Une solution de BarroTech

Exercice 18 : le cercle et l'angle droit

1. Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.
2. Sur un cercle de diamètre $[AB]$, avec $AB = 10$, on place un point M tel que $AM = 6$. Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB).
   - **a.** Justifier que le triangle AMB est rectangle en M, puis calculer MB.
   - **b.** Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = AM^2$, puis en déduire AH.
   - **c.** Calculer MH.
3. Un photographe veut que la largeur de sa photo couvre exactement une fresque de 8 mètres, et son objectif voit sous un angle droit. Il se place à 3 mètres du mur. À quelle distance du milieu de la fresque, mesurée le long du mur, doit-il se tenir ? *Aide au calcul :* $\sqrt{7} \approx 2{,}65$.
4. Montrer que si M est à l'intérieur du cercle de diamètre $[AB]$, alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} < 0$. Que peut-on dire de l'angle $\widehat{AMB}$ lorsque M n'est pas sur le segment $[AB]$?

Leçon 10 : choisir une méthode

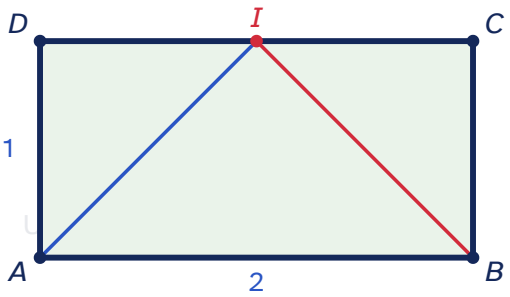
Exercice 19 : la bonne méthode

Pour chaque calcul, choisir une méthode, la nommer, puis donner le résultat.

1. $ABCD$ est un rectangle avec $AB = 6$ et $AD = 4$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Dans un triangle, $AB = 3$, $AC = 4$ et $\widehat{A} = \dfrac{2\pi}{3}$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. Dans un triangle, $AB = 5$, $AC = 6$ et $BC = 7$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
4. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u}\,(-2\,;5)$ et $\vec{v}\,(3\,;1)$.
5. $ABCD$ est un carré de côté 4, I est le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[CD]$. Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.
6. ABC est un triangle équilatéral de côté 2, et I le milieu de $[BC]$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$.

Exercice 20 : une table de billard

Une table de billard, vue de dessus, est un rectangle $ABCD$ deux fois plus long que large, avec $AB = 2$ et $AD = 1$, en mètres. Le point I est le milieu de $[DC]$.



1. **Sans repère.** Exprimer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$, puis montrer que $(AI) \perp (BI)$.
2. **Avec un repère.** Dans le repère orthonormé d'origine A où $B(2\,;0)$ et $D(0\,;1)$, retrouver ce résultat.
3. Déterminer le point E de $[AB]$ tel que $(DE) \perp (AC)$.
4. Soit K le projeté orthogonal de D sur (AC).
   - **a.** Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ avec les coordonnées.
   - **b.** En utilisant la projection, en déduire AK.
   - **c.** En déduire la distance du point D à la droite (AC).
   - **d.** Contrôler ce résultat avec l'aire du triangle ADC.