Calcul vectoriel et produit scalaire

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique. Les corrigés sont rédigés comme une copie : à l'épreuve anticipée, la qualité de la rédaction compte pour deux points sur vingt.

Exercice 1

1. On a $\overrightarrow{AB}\,(4\,;3)$, $\overrightarrow{BC}\,(3\,;-4)$ et $\overrightarrow{AC}\,(7\,;-1)$.
2. $AB=\sqrt{16+9}=5$, $BC=\sqrt{9+16}=5$ et $AC=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.
3. Comme $AB=BC$, le triangle est isocèle en B. De plus, $AB^2+BC^2=25+25=50=AC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, il est aussi rectangle en B.
4. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. Cela donne $6-x_D=4$ et $1-y_D=3$, soit $D(2\,;-2)$.
5. Le milieu de $[AC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$, et le milieu de $[BD]$ aussi. On retrouve que les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu.
6. Le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $2\times 9-(-6)\times(-3)=18-18=0$: ils sont colinéaires, et $\vec{v}=-3\vec{u}$. Le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{w}$ vaut $2\times(-4)-3\times(-3)=-8+9=1$: ils ne sont pas colinéaires.

Une solution de BarroTech

Exercice 2

1. **a.** Le projeté de C sur (AB) est B, car $(BC)\perp(AB)$.

   b. Le projeté de O sur (AB) est le milieu de $[AB]$.

   c. Le projeté de B sur (AC) est O, car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.

   d. Le projeté de D sur (BC) est C.
2. **a.** D'après le théorème de Pythagore, $BC^2=9+16=25$, donc $BC=5$.

   b. L'aire du triangle vaut $\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$, et aussi $\frac{1}{2}\times BC\times AH=\frac{5}{2}AH$. Donc $AH=\frac{12}{5}=2{,}4$. Cette longueur est la distance du point A à la droite (BC).

   c. Dans le triangle ABC, $\cos\widehat{ABC}=\frac{AB}{BC}=\frac{3}{5}$. Dans le triangle ABH, rectangle en H, $BH=AB\cos\widehat{ABC}=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$.
3. L'ombre est le projeté de la toile sur le sol. Sa longueur vaut $2\cos 30^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$, soit environ $1{,}73$ mètre.
4. D'après le théorème de Thalès, $\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}=\frac{2}{5}$. Donc $MN=\frac{2}{5}\times 10=4$.

Exercice 3

On projette sur la droite (AB), puis on compare les sens.

- **a.** D se projette en A : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
- **b.** C se projette en B : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 6 = 36$.
- **c.** I est sur (AB), du côté de B : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = 6 \times 3 = 18$.
- **d.** O se projette en I : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = 6 \times 3 = 18$.
- **e.** D et C se projettent en A et B, et le sens est le même : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 6 \times 6 = 36$.
- **f.** Les sens sont contraires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -36$.
- **g.** I reste en I et C se projette en B. Le vecteur $\overrightarrow{IB}$ a le sens de $\overrightarrow{AB}$ et $IB = 3$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC} = 6 \times 3 = 18$.
- **h.** O se projette en I. Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ a le sens contraire de $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AO} = -6 \times 3 = -18$.
- **i.** O est sur (AC), du côté de C, avec $AC = 6\sqrt{2}$ et $AO = 3\sqrt{2}$: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 36$.

Exercice 4

1. On a $AB = AH + HB = 7$.
   - **a.** H est du côté de B : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 7 \times 2 = 14$.
   - **b.** H est du côté de A à partir de B : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BH = 7 \times 5 = 35$.
   - **c.** B reste en B et C se projette en H. Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ a le sens contraire de $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -7 \times 5 = -35$.
   - **d.** $(CH) \perp (AB)$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$.
2. D'après le théorème de Pythagore dans les triangles AHC et BHC, $AC^2 = 4 + 9 = 13$ et $BC^2 = 25 + 9 = 34$.
3. H est de l'autre côté de A : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -5 \times 2 = -10$. À partir de B, H est du côté de A, avec $BH = 5 + 2 = 7$: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 5 \times 7 = 35$.

Une solution de BarroTech

Exercice 5

1. **a.** $3 \times 4 \times \dfrac{1}{2} = 6$.

   b. $2 \times 5 \times \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -5\sqrt{3}$.

   c. $6 \times 1 \times 0 = 0$.

   d. $2\sqrt{2} \times 3 \times \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -6$.

2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 6 \times \cos\dfrac{\pi}{3} = 18$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ se suivent et leur angle vaut $\dfrac{2\pi}{3}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 36 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -18$. Enfin, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 6 \times 6 \times \cos\dfrac{\pi}{3} = 18$.

3. **a.** $\cos\theta = \dfrac{6}{4 \times 3} = \dfrac{1}{2}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

   b. $\cos\theta = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

   c. $\cos\theta = \dfrac{-25}{25} = -1$, donc $\theta = \pi$: les vecteurs sont colinéaires et de sens contraires.

4. C'est faux. Dans une base orthonormée, $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = 0$, alors qu'aucun des deux vecteurs n'est nul. Un produit scalaire nul signifie seulement que les vecteurs sont orthogonaux.

Exercice 6

Une solution de BarroTech

1. $W = 50 \times 30 \times \cos 60^\circ = 750$ joules.
2. $W = 400 \times 500 \times \cos 30^\circ = 200\,000 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 100\,000\sqrt{3}$ joules, soit environ $173\,000$ joules.
3. La force est verticale et le déplacement est horizontal : ces vecteurs sont orthogonaux, donc leur produit scalaire est nul. Le travail de cette force vaut 0 joule.
4. L'angle vaut π, donc $W = 20 \times 100 \times (-1) = -2000$ joules. Le signe moins signifie que la force s'oppose au déplacement : elle freine le cycliste.
5. $\cos\theta = \dfrac{250}{50 \times 10} = \dfrac{1}{2}$, donc la force fait un angle de 60° avec le déplacement.

Exercice 7

1. $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\|\vec{v}\|^2 = -1 + 18 = 17$.
2. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 4 - 9 = -5$.
3. $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} - \vec{v}) = 6\|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\,\vec{v} \cdot \vec{u} - \|\vec{v}\|^2 = 6\|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{v}\|^2 = 24 - 1 - 9 = 14$.
4. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4 - 2 + 9 = 11$.
5. $\vec{u} + k\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{v}$ si et seulement si $(\vec{u} + k\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$, soit $-1 + 9k = 0$. Donc $k = \dfrac{1}{9}$.

Exercice 8

1. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, on obtient $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AD^2 - AB^2 = 4 - 25 = -21$.
2. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. De même, $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
3. En développant, les termes en $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ sont nuls : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BI} = AD^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 4 - \frac{25}{4} = -\frac{9}{4}$.
4. $(AI) \perp (BI)$ si et seulement si $AD^2 = \frac{1}{4}AB^2$, c'est-à-dire $AB = 2AD$, puisque les longueurs sont positives.
5. Dans un parallélogramme, le calcul de la question 1 reste valable, car les termes $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ se compensent : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AD^2 - AB^2$. Si les diagonales sont perpendiculaires, ce produit est nul, donc $AD = AB$. Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux est un losange.

Exercice 9

1. **a.** $6 - 5 = 1$.

   b. $-12 + 12 = 0$: ces vecteurs sont orthogonaux.

   c. $2 - 3 = -1$.

   d. $2 - 1 = 1$.
2. $\|\vec{a}\| = \sqrt{16 + 9} = 5$ et $\|\vec{b}\| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$.
3. **a.** On résout $4m - 6 = 0$, donc $m = \frac{3}{2}$.

   b. On résout $m(m - 4) + 3 = 0$, soit $m^2 - 4m + 3 = 0$. Les racines ont pour somme 4 et pour produit 3 : $m = 1$ ou $m = 3$.
4. **a.** Le produit scalaire vaut $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, et les deux normes valent 2. Donc $\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$.

   b. Le produit scalaire vaut -1, et les normes valent 1 et $\sqrt{2}$. Donc $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Une solution de BarroTech

Exercice 10

1. $\overrightarrow{AB}\,(4\,;-2)$ et $\overrightarrow{DC}\,(4\,;-2)$. Ces vecteurs sont égaux, donc $ABCD$ est un parallélogramme.
2. $\overrightarrow{AD}\,(2\,;4)$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=8-8=0$. Le parallélogramme a un angle droit : c'est un rectangle.
3. $AB=\sqrt{20}$ et $AD=\sqrt{20}$. Le rectangle a deux côtés consécutifs égaux : c'est un carré. Son aire vaut 20 unités d'aire. Une unité d'aire représente 100 mètres carrés, donc l'aire du champ vaut 2000 mètres carrés.
4. $\overrightarrow{AC}\,(6\,;2)$ et $\overrightarrow{BD}\,(-2\,;6)$, donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-12+12=0$.
5. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=24-4=20$. De plus, $AB=2\sqrt{5}$ et $AC=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$. Donc $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{20}{2\sqrt{5}\times 2\sqrt{10}}=\dfrac{20}{20\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et $\widehat{BAC}=\dfrac{\pi}{4}$. On retrouve l'angle entre un côté et une diagonale d'un carré.
6. Soit $P(x\,;0)$. Alors $\overrightarrow{AP}\,(x+1\,;-1)$, et la condition s'écrit $4(x+1)+2=0$. Donc $x=-\dfrac{3}{2}$, soit $P\left(-\dfrac{3}{2}\,;0\right)$.

Exercice 11

1. $\vec{e_1}\cdot\vec{e_1}=\dfrac{9}{25}+\dfrac{16}{25}=1$, $\vec{e_2}\cdot\vec{e_2}=\dfrac{16}{25}+\dfrac{9}{25}=1$ et $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=-\dfrac{12}{25}+\dfrac{12}{25}=0$. Les vecteurs sont de norme 1 et orthogonaux : c'est une base orthonormée.
2. $\vec{u}\cdot\vec{e_1}=3+8=11$ et $\vec{u}\cdot\vec{e_2}=-4+6=2$: dans cette base, $\vec{u}\,(11\,;2)$. De même, $\vec{v}\cdot\vec{e_1}=\dfrac{6}{5}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{5}$ et $\vec{v}\cdot\vec{e_2}=-\dfrac{8}{5}-\dfrac{3}{5}=-\dfrac{11}{5}$: dans cette base, $\vec{v}\left(\dfrac{2}{5}\,;-\dfrac{11}{5}\right)$.
3. $5^2+10^2=125$ et $11^2+2^2=125$: la norme de $\vec{u}$ est la même, $\sqrt{125}=5\sqrt{5}$.
4. Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=10-10=0$. Dans la base $(\vec{e_1},\vec{e_2})$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=11\times\dfrac{2}{5}+2\times\left(-\dfrac{11}{5}\right)=\dfrac{22}{5}-\dfrac{22}{5}=0$. Les deux calculs concordent.
5. On a $\vec{f_1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\vec{f_2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Alors $\vec{w}\cdot\vec{f_1}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ et $\vec{w}\cdot\vec{f_2}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$. Dans cette base, $\vec{w}\left(2\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}\right)$. Vérification : $2\sqrt{2}\,\vec{f_1}-\sqrt{2}\,\vec{f_2}$ a pour coordonnées $(2+1\,;2-1)$, soit $(3\,;1)$.

Une solution de BarroTech

Exercice 12

1. $\vec{v} \cdot \vec{e_1} = \frac{3}{5} + \frac{12}{5} = 3$ et $\vec{v} \cdot \vec{e_2} = -\frac{4}{5} + \frac{9}{5} = 1$. Le kayak avance à 3 mètres par seconde le long de la rive et à 1 mètre par seconde vers la rive d'en face.
2. Il traverse 40 mètres à 1 mètre par seconde, donc en 40 secondes. Pendant ce temps, il parcourt $3 \times 40 = 120$ mètres le long de la rive.
3. $\vec{w} \cdot \vec{e_1} = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = 1$ et $\vec{w} \cdot \vec{e_2} = \frac{4}{5} + \frac{6}{5} = 2$. Le second kayak avance à 1 mètre par seconde le long de la rive et à 2 mètres par seconde vers l'autre rive. Il traverse en 20 secondes, et il se déplace de 20 mètres le long de la rive.
4. Le second kayak traverse le plus vite. Pourtant, c'est le premier qui va le plus vite en norme : $\|\vec{v}\| = \sqrt{10}$ et $\|\vec{w}\| = \sqrt{5}$. Ce qui compte pour traverser, c'est la seule coordonnée sur $\vec{e_2}$.

Exercice 13

1. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 9 + 12 + 16 = 37$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 9 - 12 + 16 = 13$. Donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{37}$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{13}$.
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(16 - 4 - 9) = \frac{3}{2}$. Puis $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4 - 3 + 9 = 10$, donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{10}$.
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(36 + 25 - 49) = 6$. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(36 + 49 - 25) = 30$. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(25 + 49 - 36) = 19$.
4. La somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des côtés : $d^2 + 64 = 2 \times 16 + 2 \times 36 = 104$. Donc $d^2 = 40$ et $d = 2\sqrt{10}$.

Exercice 14

1. **a.** Soit C le sommet entre les côtés 5 et 12. Le produit scalaire en ce sommet vaut $\frac{1}{2}(25 + 144 - 169) = 0$: le triangle est rectangle.

   b. Le plus grand côté mesure 9. Le produit scalaire au sommet opposé vaut $\frac{1}{2}(36 + 49 - 81) = 2$, qui n'est pas nul. L'angle opposé au plus grand côté n'est donc pas droit, et les deux autres angles, plus petits, ne le sont pas non plus : le triangle n'est pas rectangle.
2. En retranchant les deux développements, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\,\vec{u} \cdot \vec{v}$. Si les deux normes sont égales, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur a donc deux côtés consécutifs perpendiculaires : c'est un rectangle.
3. **a.** D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AI}$, car I est le milieu de $[BC]$. Et $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.

   b. Avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, la relation du parallélogramme donne $4AI^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$. En divisant par 2, on obtient $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.

   c. $49 + 81 = 2AI^2 + 32$, donc $AI^2 = 49$ et $AI = 7$.

Exercice 15

1. **a.** $a^2 = 9 + 64 - 2 \times 3 \times 8 \times \dfrac{1}{2} = 49$, donc $a = 7$.

   b. $a^2 = 25 + 9 - 2 \times 5 \times 3 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 49$, donc $a = 7$.

   c. $a^2 = 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \dfrac{1}{2} = 28$, donc $a = 2\sqrt{7}$.

   d. $a^2 = 4 + 8 - 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 12 - 8 = 4$, donc $a = 2$.
2. **a.** $\cos \widehat{A} = \dfrac{25 + 64 - 49}{2 \times 5 \times 8} = \dfrac{40}{80} = \dfrac{1}{2}$, donc $\widehat{A} = 60°$.

   b. $\cos \widehat{A} = \dfrac{49 + 64 - 169}{2 \times 7 \times 8} = \dfrac{-56}{112} = -\dfrac{1}{2}$, donc $\widehat{A} = 120°$.
3. On a $c = 4$, $b = 5$ et $a = 6$. Alors $\cos \widehat{A} = \dfrac{25 + 16 - 36}{40} = \dfrac{1}{8}$, $\cos \widehat{B} = \dfrac{36 + 16 - 25}{48} = \dfrac{27}{48} = \dfrac{9}{16}$ et $\cos \widehat{C} = \dfrac{36 + 25 - 16}{60} = \dfrac{45}{60} = \dfrac{3}{4}$.
4. On compare le carré du plus grand côté à la somme des carrés des deux autres.

   a. $49 + 64 = 113 > 100$: le plus grand angle est aigu.

   b. $81 + 144 = 225$, égal à 15^2 : il est droit.

   c. $25 + 81 = 106 < 121$: il est obtus.

Exercice 16

Une solution de BarroTech

1. D'après la formule d'Al-Kashi, l'écart e vérifie $e^2 = 100 + 100 - 200\cos\theta$. Pour $60°$, $e^2 = 100$ et $e = 10$ centimètres. Pour $90°$, $e^2 = 200$ et $e = 10\sqrt{2}$ centimètres. Pour $120°$, $e^2 = 300$ et $e = 10\sqrt{3}$ centimètres.
2. En hectomètres, $BC^2 = 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 49$. Donc $BC = 7$: l'étang mesure 700 mètres de large entre B et C.
3. **a.** En décamètres, $\cos \widehat{A} = \dfrac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} = \dfrac{40}{80} = \dfrac{1}{2}$, donc $\widehat{A} = 60°$.

   b. Soit H le pied de la hauteur issue de C. Dans le triangle AHC, rectangle en H, $CH = AC \sin 60° = 80 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}$ mètres. L'aire vaut $\dfrac{1}{2} \times 50 \times 40\sqrt{3} = 1000\sqrt{3}$ mètres carrés, soit environ 1730 mètres carrés.

Exercice 17

1. On a $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$, car I est le milieu de $[AB]$. Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - 16$, puisque $IA = 4$.
2. Si $MI = 5$, le produit vaut $25 - 16 = 9$. Si $M = I$, il vaut -16. Si $M = A$, on a $MI = 4$ et il vaut 0, ce qui est cohérent, car $\overrightarrow{MA}$ est alors nul.
3. **a.** $MI^2 = 25$: c'est le cercle de centre I et de rayon 5.

   b. $MI^2 = 16$: c'est le cercle de centre I et de rayon 4, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.

   c. $MI^2 = 0$: c'est le point I.

   d. $MI^2 = -4$: aucun point ne convient, car un carré n'est pas négatif.
4. Il faut $k + 16 = 36$, soit $k = 20$.
5. **Avec la transformation.** Le triangle IBC est rectangle en B, donc $CI^2 = 16 + 9 = 25$, et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 25 - 16 = 9$. **Avec une projection.** Le projeté de A sur (CB) est B, donc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CB \times CB = 9$. Les deux résultats concordent.

Exercice 18

1. Soit I le milieu de $[AB]$. On a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$. Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ équivaut à $MI^2 = \dfrac{AB^2}{4}$, puis à $MI = \dfrac{AB}{2}$, car les longueurs sont positives. L'ensemble cherché est le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{AB}{2}$, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.
2. **a.** M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ et il est différent de A et de B, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$: le triangle AMB est rectangle en M. D'après le théorème de Pythagore, $MB^2 = 100 - 36 = 64$, donc $MB = 8$.

   b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{AM} = AM^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AM} = AM^2$, car $(MB) \perp (AM)$. Ce produit est positif, donc H est du côté de B, et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = AB \times AH$. Ainsi, $10 \times AH = 36$ et $AH = 3{,}6$.

   c. Dans le triangle AHM, rectangle en H, $MH^2 = 36 - 12{,}96 = 23{,}04$, donc $MH = 4{,}8$.
3. Il doit voir la fresque $[AB]$ sous un angle droit : il est sur le cercle de diamètre $[AB]$, de centre I et de rayon 4. Soit x sa distance à I mesurée le long du mur. D'après le théorème de Pythagore, $x^2 + 3^2 = 4^2$, soit $x^2 = 7$. Il doit donc se tenir à $\sqrt{7}$ mètres du milieu de la fresque, soit environ $2{,}65$ mètres, d'un côté ou de l'autre.
4. Si M est à l'intérieur du cercle, $MI < \dfrac{AB}{2}$, donc $MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} < 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} < 0$. Si M n'est pas sur le segment $[AB]$, on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \times MB \times \cos \widehat{AMB}$, donc $\cos \widehat{AMB} < 0$: l'angle $\widehat{AMB}$ est obtus.

Une solution de BarroTech

Exercice 19

1. **Projection.** C se projette en B sur (AB) : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6\times 6 = 36$.
2. **Cosinus.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times 4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -6$.
3. **Normes.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(25+36-49) = 6$.
4. **Coordonnées.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = -6+5 = -1$.
5. **Coordonnées, avec un repère que l'on place.** Avec $A(0\,;0)$, $B(4\,;0)$ et $D(0\,;4)$, on a $I(4\,;2)$ et $J(2\,;4)$. Donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ} = 8+8 = 16$.
6. **Projection.** Le triangle est équilatéral, donc $(AI)\perp(BC)$, et B se projette en I sur (AI). Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI} = AI^2$. Or $AI^2 = 4-1 = 3$. Le résultat est 3.

Exercice 20

1. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. En développant, et comme $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$, on obtient $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BI} = AD^2-\dfrac{1}{4}AB^2 = 1-1 = 0$. Donc $(AI)\perp(BI)$.
2. On a $I(1\,;1)$, donc $\overrightarrow{AI}\,(1\,;1)$ et $\overrightarrow{BI}\,(-1\,;1)$. Leur produit scalaire vaut $-1+1 = 0$: on retrouve le résultat.
3. Soit $E(x\,;0)$, avec $0\leq x\leq 2$. Alors $\overrightarrow{DE}\,(x\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(2\,;1)$. La condition s'écrit $2x-1 = 0$, donc $x = \dfrac{1}{2}$. Le point E est sur $[AB]$, à 50 centimètres de A.
4. **a.** $\overrightarrow{AC}\,(2\,;1)$ et $\overrightarrow{AD}\,(0\,;1)$, donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = 0+1 = 1$.

   b. Le produit est positif, donc K est du côté de C : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = AC\times AK$. Comme $AC = \sqrt{5}$, on obtient $AK = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

   c. Dans le triangle AKD, rectangle en K, $DK^2 = 1-\dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$. Donc $DK = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. C'est la distance de D à la droite (AC).

   d. L'aire du triangle ADC vaut $\dfrac{1}{2}\times 2\times 1 = 1$, et aussi $\dfrac{1}{2}\times AC\times DK = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}} = 1$. Les deux valeurs concordent.

Une solution de BarroTech