Suites arithmétiques et géométriques

PREMIÈRE · SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES · CORRIGÉS

Les rappels de méthode sont en italique. Les corrigés sont rédigés comme une copie : à l'épreuve anticipée, la qualité de la rédaction compte pour deux points sur vingt.

Exercice 1

1. **a.** $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) - 3 - (4n - 3) = 4$. La suite est arithmétique, de raison 4 et de premier terme $u_0 = -3$.

   b. On a $v_0 = 0$, $v_1 = 0$ et $v_2 = 2$. Donc $v_1 - v_0 = 0$ et $v_2 - v_1 = 2$. Ces différences ne sont pas égales : la suite n'est pas arithmétique.

   c. $w_{n+1} - w_n = \dfrac{5 - 2(n+1) - 5 + 2n}{3} = -\dfrac{2}{3}$. La suite est arithmétique, de raison $-\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $w_0 = \dfrac{5}{3}$.

   d. On passe d'un terme au suivant en ajoutant -7 : la suite est arithmétique, de raison -7 et de premier terme 2.

   e. On a $s_0 = 3$, $s_1 = 5$ et $s_2 = 9$. Les différences valent 2, puis 4 : la suite n'est pas arithmétique.

   f. $c_{n+1} - c_n = 0$: la suite est arithmétique, de raison 0 et de premier terme 6. Elle est constante.
2. $u_4 = 4 + 2{,}5 = 6{,}5$, puis $u_5 = 6{,}5 + 2{,}5 = 9$, et $u_2 = 4 - 2{,}5 = 1{,}5$.
3. *L'écart entre x et le terme d'avant doit être égal à l'écart entre le terme d'après et x : x est donc la moyenne des deux nombres.*

   a. $x - 7 = 19 - x$ donne $2x = 26$, soit $x = 13$.

   b. $x + 4 = 10 - x$ donne $2x = 6$, soit $x = 3$.

Exercice 2

Partie A

1. $f_0 = 18$, $f_1 = 18 - 1{,}5 = 16{,}5$ et $f_2 = 16{,}5 - 1{,}5 = 15$.
2. Chaque jour, on retire la même quantité : pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = f_n - 1{,}5$. La suite est donc arithmétique, de raison $-1{,}5$.
3. La raison est négative parce que le volume diminue.

Partie B

- Compteur : les différences valent toutes 35. Ces relevés peuvent être ceux d'une suite arithmétique de raison 35.
- Abonnés : les différences valent 100, puis 110. Ce n'est pas une suite arithmétique.
- Prix : les différences valent toutes $-0{,}30$. Ces relevés peuvent être ceux d'une suite arithmétique de raison $-0{,}3$.

Exercice 3

1. $u_n = 7 + 4n$, donc $u_{25} = 7 + 100 = 107$.
2. $v_n = -2 + 3(n-1) = 3n - 5$, donc $v_{40} = 120 - 5 = 115$.
3. Entre les rangs 4 et 9, il y a 5 étapes : $31 = 11 + 5r$, donc $r = 4$. Ensuite, $w_0 = w_4 - 4r = 11 - 16 = -5$. Ainsi, $w_n = 4n - 5$.
4. On résout $7 + 4n = 135$: $4n = 128$, soit $n = 32$. Comme 32 est un entier naturel, 135 est le terme de rang 32. En revanche, $7 + 4n = 200$ donne $n = \dfrac{193}{4}$, qui n'est pas un entier : 200 n'est pas un terme de la suite.
5. $100 - 6n < 0$ équivaut à $n > \dfrac{100}{6}$, soit $n > 16{,}66\ldots$ On vérifie : $t_{16} = 4$ et $t_{17} = -2$. Le premier rang cherché est 17.

Exercice 4

Partie A

1. Chaque jour, le niveau baisse de la même quantité : (L_n) est arithmétique, de premier terme 850 et de raison -4. Donc $L_n = 850 - 4n$.
2. La raison est strictement négative, donc la suite est strictement décroissante. Au bout de 30 jours, $L_{30} = 850 - 120 = 730$: le niveau est de 730 cm.
3. $850 - 4n < 700$ équivaut à $4n > 150$, soit $n > 37{,}5$. Le niveau passe sous 700 cm à partir du 38e jour.
4. $L_{212} = 850 - 848 = 2$ et $L_{213} = 850 - 852 = -2$. Le niveau deviendrait négatif, ce qui n'a pas de sens : le modèle n'est plus valable au-delà de 212 jours.

Partie B

1. On lit $u_0 = 6$. D'un point au suivant, on descend de $1{,}5$: $r = -1{,}5$.
2. $u_n = 6 - 1{,}5\,n$, donc $u_{20} = 6 - 30 = -24$.
3. La raison est strictement négative : la suite est strictement décroissante. Elle semble tendre vers $-\infty$.

Exercice 5

1. **a.** $\dfrac{30 \times 31}{2} = 465$.

   b. $\dfrac{200 \times 201}{2} = 20\,100$.

   c. $2(1 + 2 + \ldots + 50) = 2 \times \dfrac{50 \times 51}{2} = 2\,550$.

   d. $3(1 + 2 + \ldots + 20) = 3 \times \dfrac{20 \times 21}{2} = 630$.

2. Les termes forment une suite arithmétique de raison 4. Comme $87 = 7 + 20 \times 4$, les rangs vont de 0 à 20 : il y a 21 termes. Donc $S = \dfrac{21 \times (7 + 87)}{2} = \dfrac{21 \times 94}{2} = 987$.

3. On a $u_{15} = 10 - 2 \times 15 = -20$, et la somme compte 16 termes. Elle vaut $\dfrac{16 \times (10 - 20)}{2} = -80$.

4. L'équation s'écrit $\dfrac{n(n+1)}{2} = 210$, soit $n^2 + n - 420 = 0$. On a $\Delta = 1 + 1\,680 = 1\,681 = 41^2$. Les racines sont $\dfrac{-1 + 41}{2} = 20$ et $\dfrac{-1 - 41}{2} = -21$. Comme n est un entier naturel, $n = 20$.

Exercice 6

Partie A

1. La suite (d_n) est arithmétique, de premier terme $d_1 = 8$ et de raison $1{,}5$. Donc $d_n = 8 + 1{,}5(n - 1) = 6{,}5 + 1{,}5\,n$, et $d_{12} = 8 + 11 \times 1{,}5 = 24{,}5$.
2. La distance totale vaut $\dfrac{12 \times (8 + 24{,}5)}{2} = 6 \times 32{,}5 = 195$. On parcourt 195 km.

Une solution de BarroTech

Partie B

1. Les nombres $1, 3, 5, \ldots, 2n - 1$ se suivent en ajoutant 2 : ce sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 2. Le k-ième d'entre eux vaut $2k - 1$, avec k allant de 1 à n : il y en a n.
2. D'après la formule, $I_n = \dfrac{n \times (1 + (2n - 1))}{2} = \dfrac{n \times 2n}{2} = n^2$.
3. Comme $99 = 2 \times 50 - 1$, on prend $n = 50$: la somme vaut $50^2 = 2\,500$.

Exercice 7

1. **a.** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} = 3$. La suite est géométrique, de raison 3 et de premier terme 5.

   b. On a $v_0 = 2$, $v_1 = 3$ et $v_2 = 5$. Comme $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{5}{3}$, la suite n'est pas géométrique.

   c. $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{3^{n+2}}{2} \times \dfrac{2}{3^{n+1}} = 3$. La suite est géométrique, de raison 3 et de premier terme $w_0 = \dfrac{3}{2}$.

   d. $t_{n+1} = -t_n$: la suite est géométrique, de raison -1 et de premier terme 4.

   e. On multiplie par $\dfrac{1}{4}$: la suite est géométrique, de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme 6.

2. $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{9}{6} = 1{,}5$. Donc $u_3 = 9 \times 1{,}5 = 13{,}5$ et $u_0 = \dfrac{6}{1{,}5} = 4$.

3. **a.** Les différences valent toutes 5 : la suite peut être arithmétique. Les rapports valent 2, puis $\dfrac{3}{2}$: elle n'est pas géométrique.

   b. Les rapports valent tous $\dfrac{1}{2}$: la suite peut être géométrique. Les différences valent -8, puis -4 : elle n'est pas arithmétique.

   c. Les différences valent 1, puis 4 ; les rapports valent 2, puis 3 : ni l'une ni l'autre.

Exercice 8

1. **a.** $1{,}07$. **b.** $0{,}7$. **c.** $2{,}5$. **d.** $0{,}96$.

Une solution de BarroTech

2. **a.** $240 \times 1{,}15 = 276$ euros.

   b. $80 \times 0{,}95 = 76$ kg.

   c. $\dfrac{42}{1{,}4} = 30$ euros.

3. $\dfrac{65 - 50}{50} = 0{,}3$: c'est une hausse de $30\,\%$. $\dfrac{170 - 200}{200} = -0{,}15$: c'est une baisse de $15\,\%$.

4. **a.** $1{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}96$: c'est une baisse de $4\,\%$.

   b. $1{,}1^2 = 1{,}21$: c'est une hausse de $21\,\%$.

5. **a.** $\dfrac{1}{0{,}8} = 1{,}25$: c'est une hausse de $25\,\%$.

   b. $\dfrac{1}{1{,}6} = 0{,}625$: c'est une baisse de $37{,}5\,\%$.

6. Le taux est constant : (m_n) est une suite géométrique, de premier terme $12\,000$ et de raison $1{,}05$. On trouve $m_1 = 12\,600$ et $m_2 = 12\,600 \times 1{,}05 = 13\,230$.

Exercice 9

1. $u_n = 3 \times 2^n$, donc $u_6 = 3 \times 64 = 192$.
2. $v_n = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, donc $v_5 = 5 \times \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$.
3. Entre les rangs 2 et 5, il y a 3 étapes : $324 = 12 \times q^3$, donc $q^3 = 27$ et $q = 3$. Ensuite, $w_0 = \frac{w_2}{q^2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.
4. **a.** $a_0 > 0$ et $q > 1$: strictement croissante. Elle semble tendre vers $+\infty$.

   b. $b_0 > 0$ et $0 < q < 1$: strictement décroissante. Elle semble tendre vers 0.

   c. $c_0 < 0$ et $q > 1$: strictement décroissante. Elle semble tendre vers $-\infty$.

   d. $d_0 < 0$ et $0 < q < 1$: strictement croissante. Elle semble tendre vers 0.

   e. $q < 0$: les termes changent de signe, la suite n'est pas monotone. Comme $q \leq -1$, elle ne semble pas avoir de limite.

Exercice 10

1. Retirer $40\,\%$, c'est multiplier par $0{,}6$. Le taux est constant : (c_n) est géométrique, de premier terme 200 et de raison $0{,}6$. On trouve $c_1 = 120$, $c_2 = 72$ et $c_3 = 43{,}2$.
2. $c_n = 200 \times 0{,}6^n$.
3. Comme $c_0 > 0$ et $0 < 0{,}6 < 1$, la suite est strictement décroissante. Elle semble tendre vers 0 : avec beaucoup de filtres, il ne reste presque plus de polluant.
4. $c_4 = 200 \times 0{,}1296 = 25{,}92$ et $c_5 = 200 \times 0{,}07776 = 15{,}552$. Comme la suite est décroissante, il faut 5 filtres.

Exercice 11

1. **a.** $\frac{1 - 3^7}{1 - 3} = \frac{-2\,186}{-2} = 1\,093$.

   b. $\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \frac{63}{64} = \frac{63}{32}$.

   c. $\frac{1 - 2^{13}}{1 - 2} = 2^{13} - 1 = 8\,191$.

   d. Ici, $q = -2$ et $n = 6$: $\frac{1 - (-2)^7}{1 - (-2)} = \frac{1 + 128}{3} = 43$.
2. Les termes forment une suite géométrique de raison 3. Comme $486 = 2 \times 3^5$, les exposants vont de 0 à 5 : il y a 6 termes. Donc $S = 2 \times \frac{1 - 3^6}{1 - 3} = 2 \times 364 = 728$.
3. La somme compte 8 termes : $5 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 5 \times 255 = 1\,275$.
4. $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n+1}$. En soustrayant, tous les termes du milieu disparaissent : $2S - S = 2^{n+1} - 1$. Donc $S = 2^{n+1} - 1$.

Exercice 12

Partie A

1. La suite (d_n) est géométrique, de premier terme $d_1 = 8$ et de raison $\frac{1}{2}$. Donc $d_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
2. T_n est une somme de n termes : $T_n = 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 16\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 16 - 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
3. $T_4 = 16 - 1 = 15$. Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ semble tendre vers 0, (T_n) semble tendre vers 16 : le robot ne dépassera pas 16 mètres.

Partie B

Le nombre de personnes prévenues le jour n est 3^n. En six jours, le total vaut $3 + 9 + 27 + \ldots + 729 = 3 \times \frac{1 - 3^6}{1 - 3} = 3 \times 364 = 1\,092$. Au bout de 6 jours, $1\,092$ personnes sont prévenues.

Exercice 13

1. **a.** Accroissement constant : suite arithmétique, de raison 2.

   b. Taux constant : suite géométrique, de raison $0{,}92$.

   c. Accroissement constant : suite arithmétique, de raison 50.

   d. Taux constant : suite géométrique, de raison $0{,}75$.

   e. On a $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 20$: on multiplie, puis on ajoute. Ce n'est aucune des deux.
2. **a.** $a_n = 6\,000 + 300n$ et $b_n = 6\,000 \times 1{,}04^n$. On trouve $a_1 = 6\,300$, $a_2 = 6\,600$, $b_1 = 6\,240$ et $b_2 = 6\,240 \times 1{,}04 = 6\,489{,}60$.

   b. Au bout de 10 ans, $a_{10} = 9\,000$ et $b_{10} \approx 6\,000 \times 1{,}48 = 8\,880$: le contrat B reste moins cher. Au bout de 20 ans, $a_{20} = 12\,000$ et $b_{20} \approx 6\,000 \times 2{,}19 = 13\,140$: le contrat B est plus cher. Pour un bail d'une dizaine d'années, on conseille B ; pour un bail bien plus long, on conseille A.
3. On cherche C tel que $C \times 1{,}02^2 = 2\,601$. Donc $C = \frac{2\,601}{1{,}0404} = 2\,500$. Il faut placer $2\,500$ euros.

Exercice 14

1. La suite est géométrique, de premier terme 640 et de raison $\frac{1}{2}$: $a_n = 640 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
2. 24 heures font 4 périodes : $a_4 = \frac{640}{16} = 40$. L'activité vaut 40 unités.
3. La suite est strictement décroissante, car $a_0 > 0$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$. Elle semble tendre vers 0.
4. $640 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 10$ équivaut à $2^n = 64$, soit $n = 6$. C'est au bout de $6 \times 6 = 36$ heures.
5. Les pourcentages ne s'ajoutent pas : les coefficients se multiplient. En douze heures, le coefficient vaut $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$. La baisse réelle est de $75\,\%$.

Exercice 15

1. `u` prend les valeurs 5, 7, 9, 11. `mystere(5, 2, 3)` renvoie 11. Cette fonction calcule le terme de rang n de la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
2. On complète ainsi.

```
def terme_geo(u0, q, n):
    u = u0
    for k in range(n):
        u = q * u
    return u
```

3. `[100, 95, 90, 85, 80]` et `[2, 6, 18, 54]`.
4. `[1 + 4*n for n in range(6)]`, qui donne `[1, 5, 9, 13, 17, 21]`.
5. `u` prend les valeurs 100, 200, 400, 800, $1\,600$. `seuil(1000)` renvoie 4. C'est le premier rang n tel que $100 \times 2^n \geq 1\,000$.

Exercice 16

1. Valeurs après chaque tour de boucle.

Tour	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
`s`	1	4	9	16
`u`	3	5	7	9

Une solution de BarroTech

La fonction renvoie $16 = 1 + 3 + 5 + 7$. Elle calcule la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ de la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

2. Dans `range(n)`, k va de 0 à $n - 1$: le dernier nombre, n, n'est pas ajouté. `somme_fausse(4)` renvoie $0 + 1 + 2 + 3 = 6$, au lieu de 10. Il faut écrire `range(1, n + 1)`.
3. $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$.

```
def fact(n):
    p = 1
    for k in range(1, n + 1):
        p = p * k
    return p
```

Pour un produit, la variable vaut 1 au départ, car multiplier par 1 ne change rien. Avec 0, le résultat serait toujours nul.

4. Pour $n \geq 1$, $(n+1)! = (1 \times 2 \times \ldots \times n) \times (n+1) = n! \times (n+1)$. Pour $n = 0$, $1! = 1 = 1 \times 0!$. Donc $\dfrac{7!}{6!} = 7$ et $\dfrac{10!}{8!} = 10 \times 9 = 90$.